<366093208600019

<366093208600019

Bayer. Staatsbibliothek

Math D 505 m

Mathem.

Trigonom.

p. 321. R

e. d. Pl. Scharl. 1814.

Lehrbuch

der

ebenen und sphärischen

Trigonometrie

von

Johann Schön,

der Weltweisheit Doktor und ehemaligen Professor

der Philosophie und Mathematik an der

Universität zu Würzburg.

Da veniam scriptis, quorum non gloria nobis
Causa, sed utilitas officiumque fuit.

Ovid.

Mit sechs Kupfertafeln.

Bamberg und Würzburg,

bey Jos. Anton Göbhardt,

1805.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Das Buch, welches ich hier dem Publikum übergebe, sollte mir als Vorlesebuch dienen. Fünf Jahre hatte ich am hiesigen Gymnasium den Posten eines Lehrers der Philosophie und Mathematik begleitet. Wer mit der vorigen Einrichtung der zwey philosophischen Gymnasiumskurse vertraut ist; wer die äußern Verhältnisse der Lehrer derselben kennt; wer hierbey vorzüglich die Periode berücksichtigt, in welcher sie Philosophie zu dociren hatten: der wird es kaum in Abrede stellen können, daß dieser Posten einer der beschwerlichsten und heikelsten war. Ich erhielt zur Belohnung meiner Dienste in den großen Ferien des Jahrs 1802 von dem vorigen Landesregenten, Höchst Welch-

em ich hier öffentlich meinen innigsten Dank unterthänigst zolle, die Professur der Mathematik an der Universität, jedoch mit Beybehaltung meiner Lehrstelle am Gymnasium. Das Studium der Mathematik bey unsern studirenden Jünglingen mehr zu beleben, wurde jetzt mein bestimmteres Bestreben.

Diese Absicht sollte besonders vorliegendes Buch erreichen helfen. Es sollte dem Jünglinge die ungeschminkten Reitze und den großen Nutzen der Mathematik klar zeigen; ihn zum Studium derjenigen Wissenschaft, welche von der Größe des menschlichen Geistes der unzweydeutigste Zeuge ist, der Astronomie nämlich, auffordern; es sollte ihn spornen, nicht zufrieden, gleichsam nur den Schaum der Mathematik gekostet zu haben, sich des Wesens, des Geistes dieser Wissenschaft zu bemächtigen, und sich so die Quelle der reinsten Freuden zu öffnen, welche denen fließt, die im Stande sind, sich

die

die wichtigsten Erfindungen der größten Geister der Vor- und Itztwelt zu ihrem Eigenthume zu machen.

Die Bearbeitung der Trigonometrie schien der Erreichung meiner Absicht am meisten zu entsprechen.

Einmal gehören genaue Vermessungen und ein sicherer und leichter Calcul mit zu den Forderungen unseres Zeitalters. Zu bemerken, in welchem Grade der Vollkommenheit diesen Forderungen mittels der Trigonometrie Genüge geleistet werde, muß den in die Mathematik noch nicht völlig Eingeweihten für dieselbe um so mehr einnehmen, je ebener der Weg ist, auf welchem er sich die trigonometrischen Grundsätze zu eigen machen kann. Er sieht sich nämlich hier nicht von der äußern Anschauung gleichsam in das Abstrakte der Mathematik, wie man die bloße Analysis nennen könnte, mit einem

Male geworfen; sondern anfangs an dem gewohnteren Leitbande der niedern Geometrie fortgeführt, fühlt er sich allmälig mit analytischen Formeln vertraut; lernt ihre Anwendbarkeit, und kömmt zur Einsicht, welche Kürze und Leichtigkeit uns dieselben bey trigonometrischen Rechnungen gewähren. So wird er für den analytischen Theil der Trigonometrie eingenommen.

Ich rathe daher dem Anfänger, welcher sich aus meinem Buche über die Trigonometrie selbst unterrichten will, sich vorerst, nachdem er sich eine deutliche Einsicht in die Natur der trigonometrischen Linien oder Funktionen, Einrichtung der trigon. Tafeln und ihres Gebrauches verschafft, mit Umgehung aller weitern analytisch-trigonometrischen Formeln die geometrisch deduzirten Sätze und Analogien zu eigen zu machen, auf welchen zunächst die Resolution der ebenen und sphärischen Dreyecke beruht. Hierbey wird er sich in der Anstellung der Rechnung

nung an den vorgelegten Beyspielen fleißig üben, damit er gleichfalls am Mechanischen der Trigonometrie keinen Anstoß mehr findet. Ich habe mein Werk so eingerichtet, daß es leicht wird, zu bemerken, was vor der Hand ohne Nachtheil könne überschlagen werden.

Hat er sich auf diese leichte und kurze Weise eine vertraute Bekanntschaft mit der Trigonometrie erworben: dann wird er bey nochmaliger Recapitulation vorzüglich die analytischen Formeln berücksichtigen, um eine noch genauere und leichtere Behandlung der trigonometrischen Aufgaben zu erlernen.

Auf ähnliche Art wird der Lehrer, welcher nach meinem Buche die Trigonometrie Anfängern vortragen will, zu Werke gehen.

Zweytens. Die so vorzügliche Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf Astrono-

mie muß für den Anfänger, welcher das Studium der Mathematik liebgewonnen hat, gewissermaßen überraschend seyn; indem er die merkwürdigsten Dinge oder Eigenschaften in Ansehung der Himmelskörper aus den gehörigen Datis mit Hülfe einfacher Formeln zu bestimmen und zu berechnen vermag. Das Vergnügen, welches ihm aus dieser Bemerkung fließet, verbunden mit der Reflexion, daß er sich durch das fleißige Studium der Trigonometrie die wichtigste Vorbereitung zur Astronomie erworben habe, wird ihn anfeuern, die Astronomie, als Wissenschaft, zu studiren. Ist übrigens die Lage des talentvollen und thätigen Jünglinges eine solche, daß er die astronomischen Instrumente kennen lernen, und selbst manche Beobachtungen unter der Anleitung eines bereitwilligen Lehrers anstellen kann: desto besser dann für ihn, für die Wissenschaft und den Staat.

Gern

Vorrede.

Gern hätte ich auch noch im Anhange zu diesem Werke mehrere Auflösungen astronomischer Aufgaben am gehörigen Orte gegeben; allein, wenn ich die Gränze der geforderten Vorkenntnisse nicht überschreiten wollte: durfte ich es nicht. Ich schrieb zunächst für Anfänger. Diese haben sich nun entweder die wenigen astronomischen Begriffe, welche zum Verstehen der vorhin erwähnten Anwendungen der sphär. Trigonometrie auf Astronomie hinreichen, schon erworben; oder vermögen dieses leicht mittels Bode's Erläuterung der Sternkunde, oder irgend eines andern astronom. Buches; oder der Lehrer trägt in einer Vorlesung diese Vorbegriffe selbst vor. Aber die Auflösung der Aufgaben, von welchen vorzüglich im Anhange hätte die Rede seyn können, setzt zu ihrem Verstehen nicht nur die Kenntniß jener wenigen Begriffe (z. B. der Länge, Breite... eines Gestirnes...), sondern auch mehrerer astronomischer Lehrsätze voraus.

Drittens. Die Einsicht, von welcher wichtigen Anwendung der Differential- und Integralcalcul allein schon auf die Trigonometrie ist, um durch diese die größtmögliche Genauigkeit in Praxi zu erhalten, muß den Anfänger, nicht zufrieden mit der Kenntniß der im Anhange aufgestellten Grundsätze dieses Calculs, dahin vermögen, daß er denselben in seiner völligen Schärfe und Ausdehnung mit allem Fleiße studirt, und sich eben dadurch die Fähigkeit erwirbt, das Wichtigste und Feinste (wenn ich so sagen darf) von jeder Wissenschaft, welche bloß durch Mathematik als solche existirt, (der Physik, Astronomie,) auf überzeugende Art zu verstehen. Hier erst, durch das Studium dieses Calculs (der Analysis des Unendlichen), auf dessen Erfindung das Zeitalter eines Leibniz, Newton mit Rechte stolz war, tritt der Jüngling in das Heiligthum der Mathematik ein. Durch dieses lernt er erst einsehen, wie viel Wichtiges und Großes der Geist des Mensch-

en auf die leichteste und einfachste Art, gleich dem Urprinze des Universums, auszurichten im Stande ist. Durch den vertrauten Umgang, dessen er mittels des Studiums dieser Wissenschaft mit denen genieset, welche ihr Jahrhundert als große Köpfe auszeichneten, wird nicht nur seine Urtheilskraft immer geschärfter; sondern er muß sich durch jenen auch selbst veredelter und für alles Wahre und Gute mehr eingenommen fühlen.

Der anerkannten Wichtigkeit dieser Wissenschaft haben wir ohne Zweifel die Bemühungen neuerer Mathematiker um ihre festere Begründung zu verdanken. Hieher gehören vorzugsweise La Grange, Lacroix, und Pasquich. Sollte auch wirklich nach dem Urtheile des Herrn Professor Schulz *) (den ich auch für den

Ver-

*) Man s. den Anh. der sehr kurzen und leichten Entw. einiger der wichtigigsten mathemat. Theorien.

Vorrede.

Verfasser des gründlichen Aufsatzes über den Begriff des Unendlichen in Mellin's encyklop. Wörterb. d. krit. Phil. V. Bs. 2te Abth. S. 616.. halten möchte) der Differential- und Integralcalcul keiner andern und festern Begründung, als der Leibniz'schen bedürfen: so sind doch die Schriften jener Gelehrten dem ernsten Studium eines jeden anzuempfehlen, welcher in der höhern Analysis Gründlichkeit und Gewandheit zu besitzen wünscht. — Daß ich im Anhange keinen weitern Gebrauch von den vortrefflichen Schriften dieser Männer machte, wird mir kaum einer zum Fehler anrechnen, welcher den Zweck, den ich dort zu erreichen strebte, im Auge hat.

Ob und in wiefern nun vorliegendes Lehrbuch so geeignet sey, daß dadurch zur Belebung des Studiums der Mathematik in Würzburg beygetragen werde; muß ich dem Ausspruche gelehrter Richter überlassen. Ich bin mir bewußt, daß ich es nicht am ausdauernden Fleiße

und

und stäten Nachdenken über die tauglichste Einrichtung dieser Schrift habe mangeln lassen. Ich bemühte mich, Alles mit der möglichsten Deutlichkeit vorzutragen, um das Eindringen in diese Wissenschaft, den Gegenstand dieses Buches, dem Anfänger nach Kräften zu erleichtern. Ich suchte bey der Ausarbeitung dieses Lehrbuches den Mittelweg zwischen völliger Ausführlichkeit eines bloß für das Publikum bestimmten Werkes, und der gedrängten Kürze eines Vorlesebuches zu halten; um einerseits den Selbstunterricht aus demselben nicht unmöglich zu machen, andererseits aber dem mündlichen Vertrage noch mehr Aufhellung, weitere Auseinandersetzung mancher nur angedeuteten Materien und Zusätze jeder Art vorzubehalten. Durch die strenge systematische Ordnung, als Haupterforderniß eines mathematischen Lehrbuches, immer geleitet, kam ich nothwendig zu jener Anordnung, vermöge welcher ich im Anhange alles Schwierigere und Höhere des trigonometrischen Calculs auf wenigen Bogen zusammendrängte.

drängte. Dadurch gewann ich nicht nur die erwünschte Vollständigkeit eines nach den Bedürfnissen unserer Zeit und den Fortschritten der Wissenschaft selbst verfaßten Handbuches der Trigonometrie, sondern auch den beabsichtigten Vortheil, daß der Leser alle jene Materien, die in nothwendiger Beziehung auf einander stehen, mit einem Blicke übersehen, und mit Leichtigkeit eine nach der andern durchstudiren kann, indem er sich der unmittelbar vorhergehenden noch deutlich bewußt ist. Ich erinnere nur noch, daß der Anfänger wohl thut, wenn er zuvor, ehe er dem Anhange sein Studium widmet, sich die Newton'sche Binomialformel, wenn gleich nur in so weit, als sie in der niedern Algebra bey der Lehre von den Potenzen gewöhnlich abgehandelt wird, vergegenwärtiget, und sich in der Anwendung derselben fleißig übet.

In Ansehung der an Ort und Stelle jederzeit eingewebten geschichtlichen Bemerkungen muß ich noch erklären, daß ich keineswegs eine

voll-

vollständige Geschichte der Trigonometrie zerstreut liefern, sondern von derselben nur immer das Interessanteste auf die möglich-kürzeste Art beybringen wollte. Ich habe daher häufig auf Herrn Professors Pfleiderer Lehrb. d. ebenen Trigonometrie verwiesen, welches sowohl wegen seiner Vorzüglichkeit, als Wohlfeilheit in den Händen meiner meisten Leser seyn kann. — Vom Geschichtlichen gänzlich schweigen, schien mir darum nicht räthlich, weil die Wißbegierde des Jünglinges geschichtliche Gegenstände mit vielem Vergnügen auffaßt, diese folglich immer angenehme Ruhepunkte für den angestrengten Verstand werden. Und dann ist es für jeden Schätzer der Wissenschaft an und für sich etwas Interessantes, die kleinen Anfänge einer speziellen Wissenschaft, die ersten zu bekämpfenden Schwierigkeiten und die Männer zu kennen, deren vereinten Bemühungen die Wissenschaft ihre weitere Ausbildung oder ihren jedesmaligen Grad von Vollkommenheit zu verdanken hat. Dieses zu wissen, gehört unstreitig mit zur all-

seiti-

seitigen Bildung des jungen Studirenden. Er soll durch das Bemerken fremder ausdauernder Kraft in Ueberwindung mächtiger Hindernisse zur ähnlichen rastlosen Thätigkeit angefeuert; und zugleich mit Achtung gegen alle jene Männer erfüllt werden, deren ganzes Leben ein Opfer der der Menschheit nützlichen Wissenschaften war. Anderer Verdienst aber anerkennen und schätzen ist der Ausdruck der schönen Tugend Bescheidenheit.

Die trigonometrischen Rechnungen werden mittels dreyerley zum bequemen Gebrauche verfertigten Tafeln geführt: nämlich mittels der Logarithmentafel für die Sinusse..., der Tafel für die natürlichen Sinusse... und der Tafel für die in Decimaltheilen des Halbmessers = 1 ausgedrückten Bogen. Von der Art, wie man jede dieser Tafeln berechnen könne, gebe ich im vorliegenden Buche Rechenschaft, ohne, wie ich glaube, den Vorwurf befürchten zu müssen, daß ich der Kürze willen nur auf die Wirklich-

lichkeit hätte verweisen können. Warum hätte ich das Wie, wornach der nicht ganz träge und für die Wissenschaft nicht ganz verlorne Verstand sicher fragt, erst in andern Schriften sollen suchen lassen? Ueber die Konstruktion der ersten Tafel findet der Leser bey der Bestimmung der Natur der trigonometrischen Funktionen; über die der zwey letzten aber erst am Ende des Anhanges die nöthige Auskunft, weil sich diese auf Differential- und Integralrechnung stützen.

Was ich in dieser Vorrede vom Nutzen der Mathematik und ihrem allseitigen Einflusse auf den Geist und das Herz des Menschen in Beziehung auf Trigonometrie nur kurz andeutete; was ich zu ihrer und meiner Rechtfertigung, daß ich in diesem Lehrbuche der streng mathematischen Methode gefolgt bin, wider die Behauptung eines neuen Lehrers der Philosophie hätte sagen sollen; enthält in Beziehung auf Mathematik überhaupt meine erst jüngst er-

 schien.

schienene Schrift: „Prüfung der von Herrn Professor Wagner vorgeschlagenen Reform der Mathematik" weitläufiger, auf welche ich daher meine Leser verweise.

Zum Schlusse versichere ich den gelehrten Beurtheilern dieses vorliegenden Lehrbuches, daß ich ihre gelehrten Bemerkungen und vorgeschlagenen Verbesserungen mit Danke annehmen und benützen werde; diese mögen mir durch die öffentlichen Blätter, oder in gütigen Privatbriefen zukommen.

Würzburg den 30sten des Jul.
1804.

Der Verfasser.

Summarische Inhaltsanzeige.

I. Begriff, Eintheilung und Nutzen der Trigonometrie von Seite 1 bis 9.

II. Bestimmung der Natur der trigonometrischen Linien von S. 9—38.

a) Des Sinus v. S. 9—22; b) des Cosinus v. S. 22—24; c) des Sinus versus und Cosinus versus v. S. 24—27; d) der Tangente, Sekante, Cotangente, Cosekante v. S. 27—31.

III. Von den Sinustafeln v. S. 38—67; a) Grundsätze ihrer Berechnung v. S. 38—49; b) kurze Erörterungen, die Geschichte und den Gebrauch derselben betreffend v. S. 49—67.

IV. Tafel der brauchbarsten Formeln für die trigonometrischen Formeln für den Halbmesser = 1 entwickelt v. S. 68—106.

V. Anwendung der trigonometrischen Funktion auf die Auflösung der Probleme vom zweyten und dritten gemischten Grade v. S. 106—116.

VI. Grundsätze und Tafel für die Resolution geradliniger rechtwinkliger und gleichschenkliger Dreyecke. nebst Beyspielen v. S. 116—127.

VII. Grundsätze für die Resolution 1. geradliniger, schiefwinkliger Dreyecke aus unmittelbar gegebenen Stücken und aus Summen, Unterschieden derselben oder Flächenraume des Dreyeckes, 2. der Poligone durch Beyspiele erläutert, nebst einer Tabelle, v. S. 127—191.

a) Synthetische Auflösung des ersten Falles „aus 2 gegebenen Winkeln und einer Seite; oder aus 2 gegebenen Seiten und einem nicht eingeschlossenen Winkel das übrige zu finden" S. 128.

b) Analytische Aufl. desselben Falles, S. 130.

c) Synthet. Aufl. des zweyten Falles „aus 2 mit dem zwischenliegenden Winkel gegebenen Seiten das übrige zu finden" S. 132.

d) Analyt. Aufl. desselben Falles S. 134.

e) Drey synth. Aufl. des dritten Falles „aus drey gegebenen Seiten die Winkel zu finden" v. S. 142—159.

f) Analyt. Aufl. desselben Falles S. 159.

g) Analyt. Formeln, wodurch man das Gesuchte unmittelbar finden kann v. S. 163—168.

h) Auflösung der Aufgaben „aus gegebenen Summen und Unterschieden des geradlinigen Dreyeckes die übrigen zu finden" v. S. 168—175.

i) Aufgaben, die Resolution der Parallelogramme, der verschiedenen Berechnung des Inhaltes eines ebenen Dreyeckes, Viereckes, Fünfeckes und Sechseckes betreffend v. S. 175—191.

Inhalt.

VIII. Von den Eigenschaften der sphärischen Dreyecke, oder die Sphärik als Einleitung zur sphärischen Trigonometrie v. S. 191—215.

IX. Synthetisch deduzirte Formeln für die Resolution rechtwinkliger Kugeldreyecke, durch Beyspiele erläutert, nebst einer Tabelle über die Aufl. aller hierher gehörigen Fälle v. S. 215—232.

X. Der Berechnung schiefwinkliger Kugeldreyecke ist der zweyte Abschnitt der sphärischen Trigonometrie v. S. 233—285 gewidmet.

1) Geometrisch deduzirte Formeln zur Berechnung dieser Dreyecke S. 233—241.

2) Analytische Formeln zu demselben Behufe S. 241—256.

3) Aufzählung und Auflösung der 12 hierher gehörigen Fälle S. 256—273.

4) Eigene Resolution der gleichschenkligen Kugeldreyecke v. S. 273—277.

5. Bestimmung des Inhaltes des sphärischen Dreyeckes S. 277.

XI. Anwendung der sphärischen Trigonometrie

1. auf die Geodäsie S. 285—290.

2. auf Astronomie S. 290—301.

3. auf mathematische Geographie S. 301—312.

4. auf Gnomonik 312—316.

5. auf die Stereometrie S. 316—318.

Inhalt.

Inhaltsanzeige des Anhanges.

A. Begriffe und erste Grundsätze des Differential und Integralcalculs als nöthige Einleitung S. 321—333.

B. Allgemeine Differenzenformeln für die trigonometrischen Funktionen, v. S. 333—343.

1. Formeln endlicher Differenzen S. 333.

2. —— unendlich kleinere Differenzen S. 335.

3. Andere Differentialformeln für arc. sin.; arc. cos. etc. S. 338.

4. Beyspiele zum Gebrauche dieser Formeln S. 340.

C. Logarithmische Differentialformeln der trigonometrischen Funktionen v. S. 343—347.

D. Differentialformeln für geradlinige Dreyecke v. S. 347—363.

E. Differentialformeln für Kugeldreyecke v. S. 363—379.

F. Den Werth irgend eines Bogens α in Theilen des Halbmessers auszudrücken v. S. 379—386.

G. Aus dem in Theilen des Halbmessers ausgedrückten Bogen α, den Sinus dieses Bogens in denselben Theilen zu finden v. S. 386—392.

Bücher-

Bücherverzeichniß.

Grundriß der reinen und angewandten Mathematik von Fr. Lorenz, Conventual am Stift und Kloster Berge bey Magdeb. und Oberlehrer am Pädagogio daselbst. 2 Theile nebst einem Anhange. Helmstädt b. Flekeisen. 1791. 92. (Gegenwärtig beschäftigt sich der Hr. Verfasser mit einer gänzlichen Umarbeitung.)

W. Clemm's, ordentl. Prof. auf der Universität zu Tübingen ꝛc. mathem. Lehrbuch ꝛc. 2 Theile. 2te verb. u. verm. Auflage. Stuttgard b. Metzler 1768.

Lehrbegriff der gesammten Mathematik von Wencesl. Joh. Karsten, Hofr. und Prof. der Mathem. zu Halle ꝛc. 8 Theile. 2te Auflage. Greifwalde b. Röse 1782...

Lehrbuch der Mathematik mit Rücksicht auf solche, welche sie erlernen, um sie bey ihren mehr oder weniger damit in Verbindung stehenden Berufsgeschäften zu benutzen. Durch B. F. Mönnich, königl. preuß. geheim. Ober-Berg- und Ober-Baurath ꝛc. 4 Bände. 2te sehr verm. und veränd. Auflage. Berlin b. Lange. 1784. 97. 1800. 801.

Kurzer Lehrbegriff der Mathematik, 1ter Theil. Zum Gebrauche der Vorlesungen und für Schulen von

Joh. Schulz, ordentl. Professor der Mathem. Königsberg, b. Friedr. Nicolovius. 1797.

Leçons elementaires de Mathématiques. Par M. l'Abbé de la Caille. Nouvelle edition, augmentée de la resolution des problêmes indeterminés, etc. par M. l'Abbé Marie, de la Maison et Société de Sorbonne, Censeur Royale, ancien Prof. de Philos. au College du Plessis, Prof. de Mathem. au College Mazarin. A Paris, chez Desaint. 1770.

Cours de Mathematiques, a l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine. Par M. Bézout, de l'Académie Royale des scienc. et celle de la Marine, etc. VI. Parties. A Versailles de l'imprimerie de Ph. D. Pierres. 1789....

Leonhard Eüler's vollständige Anleitung zur niedern und höhern Algebra, nach der franz. Ausg. des Hrn. de la Grange, mit Anmerk. und Zus. herausgegeben von J. Th. Grüson. 3 Theile. Berlin, b. Nauk. 1796—97.

Elementa Analyseos et Geometriae sublimioris, ex evidentissimis notionibus principiisque deducta.

Auch unter dem Titel:

Opuscula statico-mechanica principiis analyseos finit. superstructa. Editore Joan. Pasquich, mathes. sublim. in Reg. Scient Univ. Hung. Professore emerito. Vol. II. Lipsiae in Libr. Weidm. 1799.

E. F.

S. F. Lacroix Lehrbegriff des Differential- und Integralcalculs. Aus dem Franz. übersetzt und mit einigen Zusätzen und Anmerkungen begleitet von J. Ph. Grüson, königl. preuß. Professor der Mathematik. 2 Theile. Berlin, b. Lagarde. 1799. 1800.

Leonh. Eüler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Aus dem Latein. von J. A. Milchelsen, Professor der Mathematik und Physik am vereinigten Berlinischen und Cölnischen Gymnasium. Berlin, 1. 2. Buch. b. Hesse 1788; 3. Buch b. Matzdorf. 1791.

Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen, von Ab. G. Käſtner*). 2te Auflage. Göttingen b. Wittwe Randenpäck 1770.

Desselben astronomische Abhandlungen. Zwey Sammlungen. Göttingen b. Wittwe Rand. 1772—74.

Desselben geometrische Abhandlungen. Zwey Sammlungen. Göttingen b. Randenp. u. Ruprecht 1791...

Sehr kurze und leichte Entwickelung einiger der wichtigsten mathematischen Theorien von Joh. Schulz, königl. Hofpred. u. Professor der Mathematik. Königsberg b. Nicolovius 1803.

Ebene Trigonometrie mit Anwendungen und Beyträgen zur Geschichte derselben (von Hrn. Prof. Pfleiderer). Tübingen in der Cotta'schen Buchh. 1802.

*) Käſtner ſtarb d. 20ten Jun. 1800 in einem Alter von 79 Jahren. 8 M. 23 T.

Bücherverzeichniß.

Traité de Trigonométrie rectiligne et ſphérique, contenant des methodes et des formules nonvelles, avec des applications a la plupart des problêmes de l'Aſtronomie. Par M. Cagnoli, Citoyen de Verone, membre de la ſocieté Italienne, etc. Traduit de l'Italien par M. Chompré. De l'imprimerie de Didot l'aîné. A Paris 1786.

Analytiſche Trigonometrie von Georg Simon Klügel, der Mathematik ordentl. Lehrer auf der Julius Carls Univerſität, ꝛc. Braunſchweig in der fürſtl. Waiſenbuchh. 1770.

Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktiſchen Geometrie von M. J. Tob. Mayer, Hofr. und Profeſſor der Mathematik und Phyſik zu Erlangen. 2te verb. und verm. Auflage. 3 Theile. Göttingen b. Vandenh. und Ruprecht 1792... Gegenwärtig beſitze ich die 3te verbeſſerte und vermehrte Auflage von dieſem Werke, deſſen zwey erſten Theile 1802, der 3te 1804 erſchien. Einen 4ten Theil hat der Verfaſſer in eben dieſem Jahre bey Palm zu Erlangen herausgegeben.

Profeſſors Rüdiger Handbuch der rechnenden Aſtronomie III Bände. Leipzig in Joachims Buchhandlung 1802.

Theoretiſche Aſtronomie von Friedrich Theodor Schubert Mitglied der kaiſerl. Akademie zu Petersburg. III Theile. St. Petersburg. 1798.

Bücherverzeichniß.

Erläuterung der Sternkunde und der dazu gehörigen Wissenschaften von J. E. Bode, königl. Astronom, ꝛc. 2te sehr vermehrte und verbesserte Auflage. 2 Theile. Berlin b. Himburg 1793.

Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des 18ten Jahrh. von Ab. G. Kästner 3 Bände. Göttingen b. Rosenbusch 1796. 97. 99.

Georg Vegas Ritters des milit. Marie-Thereſie-Ordens, Major und Professor der Mathematik des kaiserl. königl. Artilleriecorps ꝛc. logarithmisch-trigonometrische Tafeln ꝛc. 3 Bände. 2te verbess. verm. und gänzlich umgearbeitete Auflage. Leipzig in der Weidm. Buchh. 1797.

Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, Trigon. und andrer zum Gebrauch der Mathematiker unentbehrlicher Tafeln von J. Carl Schulze. 2. B. Berlin 1778.

Unter den neuern trigonometrischen Tafeln verdienen wegen ihrer Vorzüglichkeit die nach der Decimaltheilung eingerichteten (1) „Tables trigonometriques (décimales), ou Table des Logarithmes des Sinus, Sécantes et Tangentes, suivant la division du quart de cercle en 100 Degrés, du Degré en 100 Minutes, et de la Minute en 100 Secondes. Précédées de la table des Logarithmes des nombres depuis dix mille jusqu' á cent mille et de plusieurs Tables subsidiaires: Calculées par Ch. Borda; revues, augmentées et publieés par J. B. J. Delambre, Membre de l'institut national

de

de France et du Bureau de longitudes. A Paris, de l'imprimerie de la Republique. An. IX."

(2) „Neue trigonometrische Tafeln für die Decimaleintheilung des Quadranten, berechnet von J. Ph. Hobert, Professor der Physik und Mathematik in der königl. preuß. Militär-Akademie des Artilleriecorps, und Ludw. Ideler, Astronom der königl. preuß. Academie der Wissenschaften. Berlin 1799. 8. 423 S." angeführt zu werden. Die Teutschen waren demnach die ersten, welche diese verdienstvolle Arbeit, welcher selbst die großen französischen Mathematiker Beyfall und Lob zollten, unternahmen. Wir besitzen an letzteren Tafeln einen vollständigen Canon von 15400 Sinus und eben so vielen Tangenten, nebst deren Logarithmen, auf 14 genaue Decimalstellen in anderthalb Jahren ganz von neuem und doppelt berechnet. Sie enthalten die Sin. Cos. Tang. und Cot. und ihre Logarithmen von 0,0000 Q bis 0,0300 Q, und von 0,9700 Q bis 1,000 Q für alle Hunderttausendtheile, d. h. in der alten Sprache von 0° bis 2° 42′, und von 87° 18′ bis 90° für alle 3 Sec. Von 0,0300 Q bis 0°9700 Q für alle Zehntausendtheile des Quadranten, oder von 2° 42′ bis 87° 18′ für alle 32 Sec. also um die Hälfte ausführlicher als die bekannten Schulze'schen Tafeln. Der Anhang enthält die zur Verwandlung der Decimaltheilung in das Sexagesimalsystem, und dieses in jene, so wie noch verschiedene mit der Decimaleintheilung des Quadranten in Verbindung stehende Tafeln, und Anzeige der fehlerhaften Endziffer in Callet's Tafeln und in Vega's thesaur. Logar. compl.

Bücherverzeichniß.

Es wird meinen Lesern nicht unangenehm seyn, hier einige Nachrichten von Cagnoli, dessen Hauptwerk ich vorhin anführte, zu erhalten, welche ich aus dem December-Hefte der monatl. Corresp. zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, von Freyh. von Zach 1803 herausgegeben, ausgezogen habe.

Cagnoli ist auf der Insel Zante, in der Stadt und Bergfestung gleichen Namens, den 29ten Septbr. 1743 geboren. Erst im Jahre 1781, als er mit der Venetianischen Gesandschaft nach Paris gekommen ist, und hier den feurigen Lehrer und Altvater aller Astronomen La Lande kennen gelernt hatte, entzündete sich seine Begierde zur Sternkunde. Sogleich errichtete er sich eine ganz artige mit den beßten Werkzeugen versehene Sternwarte. Seine in Paris in den Jahren 1783, 84 angefangenen Vorarbeiten zu einem neuen Sternverzeichnisse setzte er zu Verona auf einer auf seinem eigenen Hause erbauten Sternwarte von 1788—92 fort, wo leider un anno di vertigini (wie er sich selbst ausdrückte) seinen Beobachtungen ein Ende machte. Seinen bey dem Bombardement von Verona 1797 erlittenen Schaden ließ ihm auf La Lande's Empfehlung, Italiens Eroberer, Bonaparte, reichlich ersetzen, und bestättigte ihn in der Würde des Präsidenten der Società italiana. Dieser gelehrte Musensitz wurde nach der Abtretung von Verona an Oesterreich von Bonaparte nach Mailand verlegt, wo dieser Cagnoli als Deputirten der Cisalpinischen Republik und zugleich als Astronomen bey der Sternwarte von Brera anstellte. Als nachher das Cisalpinische Direktorium Cagnoli die Professur der Mathematik auf der neu errichteten Militairschule zu Modena übertrug: so wurde auch der Sitz der Societät mit ihrem Präsidenten dahin verlegt, wo Cagnoli seitdem mit

rast-

rastlosem Eifer die Geschäfte dieser gelehrten Gesellschaft leitet, und bereits die Herausgabe des VIII. bis IX. Bandes ihrer Gedenkschriften besorgt hat. Im X. B., der im vorigen Jahre erschien, rückte er ein vortrefflich-es Verzeichniß von 500 Sternen ein.

Wenn Cagnoli's häufige Schriften und Abhandlungen in eben diesen Memoiren der Società italiana beweisen, daß er, ungeachtet er sich erst im 40sten Lebensjahre der praktischen Sternkunde widmete, und mit vielen körperlichen Leiden und Kränklichkeiten zu kämpfen hat, doch mehr leistete, als mancher junge, gesunde und rüstige Mann: so muß dieses Muster dem Jünglinge zur Anfeurung und zur Bestättigung der Wahrheit dienen, daß er es bey gehöriger Anlage durch ausdauernden Fleiß in weit ausgedehntem Studium der Mathematik sehr hoch bringen könne.

Verbesserungen.

(Ich bitte meine Leser, folgende sinnstörende Fehler noch vor dem Lesen des Buches zu korrigiren.)

Im 1ten u. 2ten Bogen lies überall Pfleiderer statt Pfleüderer.

S. 6 Z. 9 l. Instrumente st. Instrumenten.

S. 23 im Zusatz 1 und 2 muß immer statt F gesetzt werden f; eben so S. 25.

S. 48 Z. 13 l. CP st. CD.

Ebend. st. Fig. 13 s. Fig. 11.

S. 50 Z. 9 v. unt. l. Regiomontanus.

S. 73. Z. 5 v. u. l. $\frac{1}{2}$ AJ $=$

S. 80 n. 70 l. 1 $\pm$.

S. 86 in n. 93 gilt der Strich über $\pm$ nicht.

S. 94 Zus. 1 muß nach n. 109 $=$ folgen.

S. 96 in n. 142 in der letzten Gleichung muß — vom Divisionszeichen gesondert werden.

S. 103 Z. 2 l. $10c^2f^3$.

S. 106 Z. 9 l. Coeffizienten.

S. 109 Z. 1 v. unt. in 2) l. x st. α.

S. 111 Z. 8 v. unt. ist ein $\pm$ zu viel.

S. 150 in d) l. ähnlichen st. nämlichen.

Ebend. Z. 17 l. AD. FG.

S. 155 Z. 12 v. unt. l. jedes st. jenes.

S. 161 Z. 10 v. unt. l. b st. B.

S. 164 Z. 1 l. eines gegebenen Winkels eines jeden beliebigen Dreyeckes.

Ebend. Z. 11 l. cos. α^2 st. cos. a^2.

S. 174 Z. 11 l. 45° st. 40°.

S. 175 Z. 2 v. unt. l. f st. F.

S. 177 Z. 1 v. unt. l. $\frac{1}{2}a^2$ st. $\frac{1}{2}\alpha^2$.

S. 187 Z. 16 nach Winkel fehlt bekannt.

S. 199 Z. 13 lese man: Vollendet man nun diesen Bogen durch N bis J: so kann man das Dreyeck JNPA...

S. 206 Z. 3 v. unt. l. ADe st. ADE.

S. 217 Z. 5 l. eines st. einer.

S. 227 Z. 11 am Ende l. $\frac{+}{}$ tang. ACB st. $\frac{+}{}$.

S. 230 Z. 7 v. unt. l. ϑ st. 6, und eben so im folgenden.

S. 231 in III. l. tang. ϑ st. tang. d; und IX, X st. IV, V. in X, dann cos. ϑ st. cos. d.

Ebend. Z. 7 v. unt. l. 93° st. 39°.

S. 232 Z. 4 l. den st. der.

S. 235 Z. 8 l. EH st. EA.

Ebend. Z. 7 v. unt. l. = sin. BC: sin. AB st. cos.

In III. l. = cot. B st. cos. B.

S. 240 Z. 14 l. Proportionen.

S. 243 Z. 5 v. unt. l. verzeichnen.

S. 246 in XIII. l. — cos. A. cos. C für. cos. A...

In XVII. muß vor sin. $\frac{1}{2}$ (AC $\frac{+}{}$ AB) = stehen.

S. 249 Z. 1 l. B st. m.

Z. 2 l. 180° — B st. 180° — C, Z. 3. l. §. 84. st. 48.

S. 250 Z. 9 v. unt. l. sin. $\frac{1}{2}$ (AC—AB)^2 st. sin. $\frac{1}{2}$ (AC —AB).

S. 251 Z. 1 l. cos. $\frac{1}{2}$ st. $\frac{1}{2}$ cos.

S. 252 Z. 9 l. 2 sin. $\frac{1}{2}$ B^2 st. 2 sin. B^2.

S. 255 Z. 3. ist der ganze Strich Divisionszeichen.

S. 282 Z. 2 v. unt. l. d st. ϑ.

S. 289 Z. 11 l. BCP st. BCB.

S. 296 Z. 8 v. unt. l. $\frac{+}{}$ 19° st. 29°.

Allgem.

Allgemeine Einleitung
zur
Trigonometrie.

§. 1.

Erklärung. Trigonometrie, dem Worte nach Dreyecksausmessung, heißt die Wissenschaft, aus drey gegebenen Stücken eines Dreyecks die übrigen zu finden, in so weit dieses möglich ist.

Nach der generischen Verschiedenheit der Dreyecke, die entweder ebene, oder sphärische d. i. solche sind, die auf der Oberfläche einer Kugel beschrieben werden, theilt man auch die Trigonometrie in ebene und sphärische Trigonometrie. Jede hat es zunächst nur mit Dreyecken, oder mit den Prinzipien ihrer Ausmessung zu thun. Aber mittels derselben bezieht sich die ebene Trigonometrie auch auf zusammengesetztere Figuren, dergleichen in der niedern Geometrie die Polygone überhaupt sind. Eine vollständige Anweisung, diese trigonometrisch zu berechnen, hat den Namen trigonometrische Polygonometrie.

Die Trigonometrie ist schon an sich keine rein geometrische Wissenschaft, indem sie, wie sich unten

ergeben wird, nur durch Anwendung der Arithmetik zum Ziele führen kann. Allein ihre Grundsätze, nach welcher sie Dreyecke berechnen lehrt, können rein geometrisch erwiesen werden. Daher gehört sie mehr zur Geometrie, als zur Arithmetik. Hierbey ist jedoch nicht zu übersehen, daß sich die analytische Behandlung der Trigonometrie, welche ihre so vorzügliche Ausbildung den Bemühungen neuerer Mathematiker verdankt, durch eine Leichtigkeit mit Gründlichkeit, eine Vielseitigkeit der Berechnungsart mit Kürze gepaart, so vortheilhaft auszeichnet; daß man dieselbe eigends unter dem Namen, analytische Trigonometrie einführte.

§. 2.

Ich machte bey der Erklärung der Trigonometrie §. 1. den Zusatz: in so weit dieses möglich ist; ich erörtere ihn so:

Einmal kann die ebene Trigonometrie nicht lehren, wie man aus drey gegebenen Winkeln die Seiten des Dreyecks finden könne. Denn durch jene kann keineswegs die Größe dieser, sondern nur das Verhältniß, welches jedes Paar beliebiger Seiten untereinander hat, bestimmt werden, wie aus der Aehnlichkeit der Dreyecke leicht erhellt. Dieser Fall trift jedoch nicht die sphärische Trigonometrie.

Zweytens. Aber sowohl in der ebenen als sphärischen Trigonometrie kommen zweifelhafte Fälle vor, wo nämlich die Größe des Gesuchten

an

an und für sich, d. i. durch die drey gegebenen Stücke unbestimmt gelassen ist. Der zweifelhafte Fall für die ebene Trigonometrie ist dieser:

Man soll aus zwey gegebenen Seiten und einem Winkel, der einer jener Seiten entgegengesetzt ist, den der andern gegebenen Seite entgegenstehenden Winkel, oder die dritte Seite finden.

Diese Aufgabe findet nur denn ihre Auflösung, wenn man weiß, ob der gesuchte Winkel spitz oder stumpf seyn müsse.

Im Dreyecke ABC seyen z. B. AB, BC und der Winkel A gegeben; man soll den Winkel C oder die Seite AC finden. Tab. I. Fig. I.

Man ziehe aus B, als aus dem Mittelpunkte mit dem Halbmesser = BC den Bogen CD, und aus dem Durchschnittspunkte D die Seite DB: so erhält man ein neues Dreyeck ABD, wovon, weil BC = BD, dieselben Stücke, wie in ABC, gegeben sind, woraus nun der Winkel ADB oder die Seite AD bestimmt werden müßte. Daß diese aber kleiner als AC, jener größer als C sey, lehrt der Augenschein. Folglich lassen es die drey gegebenen Stücke unbestimmt, wie groß man das Gesuchte nehmen solle.

Nun ist der Winkel C = BDC; aber des Winkels BDC folglich auch des W. C Supplementwinkel ist BDA. Wäre daher bekannt, wie groß

der gesuchte Winkel, d. i. ob er über oder unter 90° seyn müsse, so würde sich die Zweydeutigkeit heben. Fände man ihn im ersten Falle aus den gegebenen Stücken < 90°; so nähme man den Supplementwinkel, und die dritte Seite wäre denn AD. Im zweyten Falle verführe man eben so, und die 3te Seite wäre dann AC. So allein bestimmte sich denn die Figur des Dreyecks.

Dergleichen zweydeutige Fälle giebt es für die sphärische sowohl recht- als schiefwinklichte Dreyecke mehrere. Dahin gehören z. B. für die erstere alle jene Fälle, wo nebst dem rechten Winkel ein schiefer, und die diesem entgegenstehende Seite bekannt sind. — Wie man sich aber bey diesen Fällen zu benehmen habe, kann erst unten am gehörigen Orte nachgewiesen werden.

§. 3.

Die Fundamentalsätze der Trigonometrie scheinen von den ältesten uns bekannten Mathematikern blos zum Behufe der sphärischen Trigonometrie in Beziehung auf Astronomie erfunden, und zum gehörigen Gebrauche weiter bearbeitet worden zu seyn. „Das älteste, sagt Kästner*), was von Trigonometrie auf uns gekommen ist, findet sich in Ptolemäus Lehrbegriffe der Astronomie, im 1. Buche. Und das ist nicht, wie man wohl muthmaßen könnte, ebene Trigonometrie, sondern sphärische."

Für

*) Im 1ten Theile seiner Geschichte der Mathem. S. 312.

Für den ersten Erfinder der ebenen und sphärischen Trigonometrie wird indessen insgemein nicht Ptolemäus, sondern Hipparch gehalten, welcher im zweyten Jahrhunderte vor C. G. den Grund zur genauen Astronomie gelegt hat. *)

Den späteren Mathematikern war es vorbehalten, die ebene Trigonometrie als eine für sich bestehende Wissenschaft und zum vorzüglichen Behuf der Geodäsie vollständig darzustellen. Die Kenntniß derselben wird schon vor längerer Zeit allgemein bey solchen Vermessungen, die ins Große gehen, und genau seyn sollen, für unentbehrlich gehalten. Je weniger Messung, je weniger Zeichnung der Geodät bey seinen Arbeiten nöthig hat: desto genauer werden diese ausfallen. Derselbe gewinnt zwar durch die Aehnlichkeit der Figuren den Vortheil, daß er nicht so viele Vermessungen wirklich anstellen muß, als die Anwendung der ersten Grundsätze der Geometrie nöthig machen, und daß er mittels jener — Aufgaben praktisch lösen kann, welche nach dieser nur sehr schwer oder gar nicht gelöst werden können.

Wenn nämlich in einem Dreyecke 3 Stücke, worunter allzeit eine Seite seyn muß, gemessen sind: so kann zwar das Gemessene mittels des verjüngten Maaßstabes auf das Papier gebracht, oder in Grund gelegt werden; wodurch sich denn von selbst die nicht gemessenen Stücke des Dreyeckes in dem nun

*) S. H. Prof.s Pfleuderer ebene Trigonomet. S. 9. 10.

ähnlichen bestimmen, so, daß nun die mit demselben Maaße gemessenen Winkel und Seiten auf dem Papiere genau mit der Größe der Winkel und Seiten nach ihrem wahren Maaße in der Natur übereinstimmen müßten.

Allein in Ansehung dieser Uebereinstimmung kann der Geodät nie sicher seyn. Denn, wenn wir auch von den Fehlern absehen, welche ihren Grund in der Mangelhaftigkeit der anzuwendenden Instrumenten und der gehörigen Schärfe des Sehorgans haben, indem diese Fehler auch bey trigonometrischen Vermessungen zum Theil obwalten können: so sind doch diejenigen Fehler nicht zu übersehen, welche sich theils bey der Auftragung des ähnlichen Dreyeckes, wobey sich nicht selten die Winkel auf dem Meßtische wie von selbst verzeichnen, theils bey der Messung der gesuchten Größen aus diesem Dreyecke einschleichen können.

Sehr kleine Fehler aber in der Zeichnung und Messung des ähnlichen Dreyeckes führen zu weit größere, sobald man, indem man vom Kleineren auf das Größere schließt, die natürliche Länge der Seiten und den Flächenraum des Dreyeckes in der Natur aus ersterem bestimmen muß. Was man z. B. in ganz kleinen Theilen des verjüngten Maaßstabes auf dem Meßtische zu viel nahm, wird in der Natur in Schuhen u. d. gl. zu viel.

Müssen vollends mehrere untereinander verbundene Dreyecke auf dem Papiere verzeichnet werden,

um

um dann aus ihrer Aehnlichkeit mit denen in der Natur leztere so zu berechnen, als hätte man alles unmittelbar ausgemessen; so sieht man leicht ein, daß jene Fehler immer größer und bedeutender werden müssen.

Die ebene Trigonometrie nun bedarf der Zeichnung gleicher oder ähnlicher Dreyecke, und ihrer nachherigen Ausmessung nicht; sondern sie kann aus drey erfoderlichen bekannten Stücken eines Dreyeckes durch sichere Rechnung die übrigen bestimmen. Hieraus erhellet denn offenbar der Vorzug der ebenen Trigonometrie vor der Aehnlichkeit der Figuren, und der große Nutzen derselben Wissenschaft.

Daß jedoch auch die Grundsätze der sphärischen Trigonometrie ihre Anwendung auf Feldmeßkunst haben, sieht man schon aus dem einzigen wichtigen Umstande, der bey größeren z. B. Landes-Vermessungen nicht selten vorkömmt, wo nämlich die Reduktion eines auf Bergen gemessenen Winkels auf den Horizontalwinkel nothwendig ist. Eine solche Reduktion nun wird nicht nur allein durch die sphärische Trigonometrie möglich, sondern auch leicht und sicher, wie unten weitläufiger gezeigt werden soll.

Kaum brauche ich noch anzumerken, daß die Grundsätze der sphärischen Trigonometrie für die Astronomie, deren Bedürfnissen sie selbst ihren Ursprung verdankt, unentbehrlich sind.

§. 4.

Man kann die Trigonometrie überhaupt die Wissenschaft der Prinzipien für die Resolution der Dreyecke nennen. Hiebey ergeben sich natürlich drey Fragen:

1. Welches ist die der Trigonometrie ganz eigene Methode, Dreyecke zu resolviren? oder, was dasselbe ist, welches sind die Hilfsmittel oder die ersonnenen Kunstgriffe, deren sich die Trigonometrie zur Erreichung jenes Zweckes bedient?

2. Auf welchen Grundsätzen stützt sich die Auflösung

a. der rechtwinklichten
b. der schiefwinklichten Dreyecke?

Die erste Frage ist generell, oder geht die Trigonometrie überhaupt, oder, wenn man will, mittels der ebenen auch zugleich die sphärische Trigonometrie an. Ihre Beantwortung muß daher eben so generell seyn.

Bey der zweyten Hauptfrage sieht man sogleich ein, daß sie nach der ursprünglichen Verschiedenheit der Dreyecke besonders müße beantwortet werden. Und hier erst sondert sich die Trigonometrie in ebene und sphärische. Jede derselben enthält nach den zwey gegebenen Fragen 2 Abschnitte, deren erster der Resolution der rechtwinklichten, der zweyte aber — der schiefwinklichten Dreyecke gewiedmet ist.

Da die ebene Trigonometrie nebst der Kenntniß der niedern Algebra, der Logarithmen und ihres Gebrauches, und der Longimetrie und Planimetrie *) als Theilen der niedern Geometrie, zu ihrem Verstehen nichts voraussetzt, als die deutliche Einsicht in das, womit sich die Beantwortung jener ersten generellen Frage beschäftigt: so bedarf sie keiner speziellen Einleitung. Die sphärische Trigonometrie aber kann auch unter Voraussetzung der genannten Kenntnisse nicht gründlich vorgetragen, oder erlernt werden, wenn man nicht mit allem dem, was sich auf die Kugel bezieht, vollkommen vertraut ist. Da nun dieser Gegenstand zwar in die Stereometrie gehört, hier aber selten ausführlich von den Mathematikern behandelt wird: so fand ich es nach dem Beyspiele Mehrerer für nöthig, eine besondere Einleitung über die Sphärik der sphärischen Trigonometrie vorauszuschicken.

Der Trigonometrie überhaupt Einziges Hauptstück von den trigonometrischen Linien oder Funktionen.

---

§. 1.

Die allgemeinste Antwort auf die Frage: welches ist die der Trigonometrie eigene Methode zur Resolu-

*) Beyde begriffe man vielleicht schicklicher nach ἐπίπεδα unter dem Namen Epipedometrie.

tion oder Ausmessung der Dreyecke? ist diese: die Trigonometrie bedient sich zu diesem Behufe nicht selbst der Winkel, sondern statt dieser gewisser Linien, welche zwar nicht den Winkeln selbst, sondern, wie unten vorkommen wird, den Seiten proportionell, und folglich zur Anstellung des Kalkuls sehr tauglich sind.

Diese Linien heissen insgesammt trigonometrische Linien oder trigonometrische Funktionen der Winkel, als deren Stelle sie in der Rechnung vertreten.

Wie man auf diese Methode gekommen sey, davon werden die folgenden Paragraphen, ehe ich zur näheren Beschreibung jener Linien selbst komme, einigen Begriff zu geben im Stande seyn.

§. 2

Fig. 2. Beschreibt man um das Dreyeck ABD einen Kreis, so werden die Seiten des Dreyeckes Sehnen des Kreises oder der Bogen, auf welchen die Winkel des ersteren aufstehen. Da diese Winkel Peripheriewinkel sind, so ist jede Seite des Dreyeckes die Sehne des doppelten Bogens, der den gegenüberstehenden Winkel mißt.

§. 3.

Lehrs. Die Seiten eines jeden geradlinigten Dreyeckes verhalten sich wie die in irgend einerley Kreis gezogenen Sehnen der doppelten Bogen, welche

die

die gegenüberstehenden Winkel des Dreyeckes messen.

Beweis. Man ziehe (Fig. 2.) mit beliebigen Halbmesser einen kleinen concentrischen Kreis, und aus A, B, D, nach den gemeinschaftlichen Mittelpunkt die Linien AC, BC, DC, so bestimmt sich die Lage eines kleineren Dreyeckes abd, das mit dem Dreyecke ABD wechselseitig gleiche Winkel hat, folglich ein diesem ähnliches Dreyeck ist. Es ist daher

$$AB : AD : BD = ab : ad : bd.$$

Nun sind aber ab, ad, bd in dem beliebig angenommenen Kreise die Sehnen der doppelten Bogen, welche die Winkel dab = DAB, adb = ADB, abd = ABD messen, also ꝛc.

Zusatz 1. Wären folglich für irgend einen Durchmesser Tafeln der Sehnen für alle Minuten von $0° - 180°$ berechnet; so würde man vermittels derselben (weil sie, indem die Sehne eines jeden Bogens, der $> 180°$, einerley ist mit der Sehne des jenen zu $360°$ ergänzenden Bogens, zugleich die Sehnen für $180°$ übersteigende Bogen enthalten,) aus drey Stücken von 2 Seiten BD, AD und 2 Winkeln immer das 4te finden können. *)

Zusatz 2. Wären z. B. im Dreyecke ABD nebst der Seite AB in Schuhen die 2 anliegenden Win-

*) Das Verfahren, wie Ptolemäus blos nach Lehren der Elementargeometrie wirklich solche Sehnentafeln berechnete, zeigt Kästner in seiner 2. Samml. geomet. Abhandl. S. 354.

Winkel A=60°, B=75°, folglich D=45°, gegeben; wüßte man zugleich, daß in einem Kreise, dessen Durchmesser 20 Fuß ist, aus den für diesen berechneten Sehnentafeln die Sehnen der Bogen von 150°, 90°, 120° beziehungsweise 19,318516; 14,142136; 17,320508 Fuß seyen: so würde man die 2 andern Seiten des Dreyeckes durch folgende Proportionen finden:

$$14{,}142136 : \begin{Bmatrix} 19{,}318516 \\ 17{,}320508 \end{Bmatrix} = AB : \begin{Bmatrix} AD \\ BD. \end{Bmatrix}$$

§. 4.

Lehrs. Die Seiten eines jeden geradlinigten Dreyeckes verhalten sich wie die Sinusse der gegenüberliegenden Winkel.

Beweis. Die Hälften verhalten sich wie die ganzen Größen: also ist

$$AB : AD : BD = \tfrac{1}{2}ab : \tfrac{1}{2}ad : \tfrac{1}{2}bd \text{ (§. 3).}$$

d. i. die Seiten des Dreyeckes ABD verhalten sich wie die halben Sehnen der doppelten Bogen, welche die gegenüberliegende Winkel des Dreyeckes messen.

Man nennt aber diese halben Sehnen die Sinusse der Winkel;

Also ꝛc.

Schol. Sehnentafeln waren das erste Hilfsmittel zur trigonometrischen Resolution der Dreyecke. Eine solche für alle einzelne halbe Grade von 0°

—180°,

—180°, und die Methode sie zu berechnen, giebt Ptolemäus in seinem gewöhnlich nun Almagest genannten Lehrbegriffe der Astronomie. Wahrscheinlich sind es die arabischen Mathematiker, welche statt der Sehnen der doppelten Bogen, die die Winkel messen, den Gebrauch ihrer Hälften, oder der Sinusse der Winkel, in den trigonometrischen Kalkul eingeführt haben *).

§. 5.

Zieht man aus dem Mittelpunkte C (Fig. 2.) senkrechte Linien auf die Seiten der Dreyecke; so ist nach §. 4. BE = ½ BD der Sinus des Winkels BAD; im kleineren Kreise aber de = ½ bd. Eben so ist des Winkels ADB Sinus AF = ½ AB im größeren Kreise; im kleineren af = ½ ab u. s. w.

Aus dem Angeführten sieht man leicht ein, warum man den Sinus eines Bogens, oder des Centriwinkels, welchen der Bogen mißt, durch das Perpendikel definiren könne, welches von dem einen Endpunkte dieses Bogens auf den durch den andern Endpunkt gehenden Halbmesser gefällt wird.

Zieht man nämlich CE bis G fort; so ist DG = ½ DB das Maaß des Winkels DAB oder DCE, und DE = ½ DB oder das beschriebene Perpendikel ist der Sinus des Bogens DG oder des Winkels DCG.

§. 6.

*) S. Pfleiderer's zitirt. Buch §. 14.

§. 6.

Man mag den Sinus eines Winkels als die halbe Sehne, welche einen Bogen umspannt, der das Doppelte desjenigen Bogens ist, welcher den Winkel mißt, — oder als das auf die §. 5. genannte Art gefällte Perpendikel betrachten: so ergiebt sich immer, daß der Sinus eines stumpfen Winkels dem Sinus seines Supplementwinkels, d. i. dessen, der ihn zu 180° oder 2 rechten ergänzt, gleich ist.

Denn es ist im ersten Falle der Sinus z. B. eines Winkels von 100° die Hälfte der Sehne eines Bogens von 200°. Aber die Sehne eines Bogens von 200° ist einerley mit der Sehne des Ergänzungsbogens von 160°. Folglich ist der Sinus eines Winkels von 100° die Hälfte der Sehne eines Bogens von 160°; diese aber ist nach derselben Erklä ung des Sinus der Sinus eines Bogens oder Winkels von 80°, d. i. der Sinus des Supplements des Winkels von 100°.

Fig. 3. Im zweyten Falle ists augenscheinlich, daß das Perpendikel JD sowohl zum Bogen JA oder zum Winkel JCA, als zum Bogen JBH oder zum Winkel JCH nach der Definition §. 5 gehört; daß folglich der Sinus des stumpfen Winkels JCH einerley ist mit dem Sinus des spitzen Nebenwinkels JCA, der mit dem vorigen 180° macht, oder ihn zu 2 rechten Winkeln ergänzt.

Zusatz 1. Bey Verfertigung der Sinustafeln hat man also nur nöthig, Zahlen für alle einzelne Minuten von 0° bis 90° nach einem zum Grunde gelegten Halbmesser zu berechnen.

Zusatz 2. Die Vertauschung also der ganzen Sehnen mit ihren Hälften oder den Sinussen brachte dem trigonometrischen Kalkul einen doppelten Vortheil: erstens hatte man nicht mehr nöthig, die Berechnung der Sinustafeln für einen Halbkreis anzustellen. Zus. 1. Zweytens ersparte man sich dadurch die Mühe der Verdoppelung der gegebenen Winkel — §. 3. Zus. 2; wie auch des Halbirens der in den Sehnentafeln gefundenen.

§. 7.

Da man für einerley Winkel oder für Bogen von gleicher Gradenanzahl verschiedene Sinusse der Länge nach hat, so wie in Fig. 2. de eben so wohl der Sinus des Winkels dCe oder des diesen messenden Bogens dg, aber für den Halbmesser cd, als DG der Sinus des Winkels DCG = dCe, aber für den Halbmesser DC, ist: so folgt, daß der Ausdruck „Sinus eines Winkels" sich nicht auf eine gewisse bestimmte Länge bezieht, so wie auch die Anzahl der Grade eines Bogens nicht eben desselben Länge bestimmt.

Sondern, da in den ähnlichen Dreyecken DCE, dCe

DE : CD = de : Cd etc.

ist,

ist, d. i. da die verschiedenen Sinusse eines und desselben Winkels sich verhalten, wie die Halbmesser der Kreise, wozu sie gehören, und für einen und denselben Winkel DCG jeder Sinus zu seinem Halbmesser einerley Verhältniß hat, so wie Bogen dg, DG, welche denselben Winkel messen, zu ihren Umkreisen einerley Verhältniß haben: so muß man sagen, daß einen Winkel nicht die Länge des Sinus, sondern das Verhältniß desselben zu seinem Halbmesser bestimmt, und umgekehrt; so wie einen Winkel nicht die Länge eines aus seiner Spitze zwischen seinen Schenkeln gezogenen Bogens, sondern das durch die Anzahl der Grade des Bogens ausgedrückte Verhältniß des Bogens zu seinem Umfange mißt, als welches das Verhältniß des Winkels zu 4 rechten Winkeln angiebt.

§. 8.

Das Wachsen und Abnehmen der Sinusse wird dadurch deutlich eingesehen, daß man sich die Sehne JG immer lothrecht auf AH stehend von A nach H und zurück von H nach A bewegt vorstellt. Es erhellet dann, daß die Sinusse im ersten Quadranten AB von A oder von o an bis zum Halbmesser BC, oder von o° bis 90° immer wachsen, im zweyten Quadranten BH aber von da bis zu o, oder von 90° an bis 180° immer abnehmen, bis sie in H völlig verschwinden. Im dritten Quadranten HQ nehmen sie eben so wie

vor-

vorher von o bis zum Halbmesser CQ wieder zu, bis sie von da immer abnehmend in A endlich wieder verschwinden. So wie man nun gewohnt ist, die Entgegensetzung zweyer Größen durch positiv und negativ, wodurch eigentlich die Entgegensetzung ihrer Attribute angedeutet wird, auszudrücken, — oder so wie eine Größe arimethisch nur dadurch als negativ vorgestellt wird, daß sie aus dem Positiven, das an und für sich jede Größe ausdrückt, durch das o übergeht —: so hat man auch die Sinusse im 1ten, 2ten Quadranten positive, im 3ten, 4ten aber negative oder entgegengesetzte genannt, wie JD und DG.

Verdoppelt man die Peripherie, so nehmen die Sinusse von 360° oder von A bis B, oder bis 360° + 90° = 450° wieder auf derselben Seite zu, und von B bis H oder bis 450° + 90° = 540 auf eben derselben Seite wieder ab, u. s. w. wie vorher. Es bleibt folglich das angegebene Verhältniß auch für die Vervielfältigung des Umkreises. Nämlich im 5ten und 6ten Quadranten sind dann die Sinusse positiv, im 7ten und 8ten negativ u. s w.

Zusatz 1. Das Schema ist demnach dieses:

Die Sinusse sind
im Quadranten

bejaht	1	2	5	6	9	10	14	...
verneint	3	4	7	8	11	12	16	...

B Oder

Oder allgemein: ein Bogen, der sich im 4. n + 1ten oder im 4. n + 2ten Quadranten endigt, hat einen bejahten; der sich aber im 4. n + 3ten oder 4. n + 4ten endigt, einen verneinten Sinus.

Zusatz 2. Weil, wenn 2 Bogen einerley Anfang und Ende (§. 6.) oder wenn man zu einem Bogen den ganzen Kreisumfang setzt, ein neuer Bogen zum Vorschein kömmt, auch diese beyden Bogen einen Sinus der Größe nach haben: so erhellt in Verbindung mit Zusatz 1. die Richtigkeit des folgenden Schema's für Bogen die einerley entweder positiven oder negativen Sinus haben. Es bedeute nämlich x einen Bogen, der $< 90°$, π den halben Umfang des Kreises, dessen Halbmesser $= 1$; es bedeute ferner, da man jene Verdoppelung der Peripherie, so oft man will, wiederholt denken kann, n eine jede ganze Zahl:

so gehören

für die Bogen

+ sin x	x	$2\pi + x$	$4\pi + x$	... 2. n. π + x...
− sin x	π + x	$3\pi + x$	$5\pi + x$	...(2. n. + 1) π + x...
+ sin x	π − x	$3\pi - x$	$5\pi - x$	...(2. n. + 1) π − x...
− sin x	$2\pi - x$	$4\pi - x$	$6\pi - x$	... 2. n. + 1) π − x...

Der negative sowohl als der positive Sinus gehört also zu unzählig vielen Bogen. *)

§. 9.

*) Mehrere Betrachtungen über diese Reihen stellt Kästner im angeführten B. S. 253. u. ff. an.

§. 9.

Der Sinus des rechten Winkels oder des Bogens von 90° ist der Halbmesser (§. 8.). Weil nun die Sinusse der schiefen Winkel als Theile des Sinus des rechten Winkels angesehen werden können; so wird der Halbmesser auch der ganze Sinus (Sinus totus) genannt. Setzt man daher diesen der Einheit gleich: so werden die Sinusse der übrigen Bogen durch ächte Brüche entweder genau, oder innerhalb gewisser Gränzen genähert, ausgedrückt. Es verhält sich alsdenn der Sinus eines jeden Winkels zum Halbmesser oder Sinus totus genau oder beynahe, wie der Zähler des diesen Sinus bezeichnenden Bruches zu seinem Nenner.

Es ist z. B. die Seite des regulären Sechseckes die Sehne eines Bogens von 60°, und diese ist dem Halbmesser gleich; folglich ist genau der Sinus von 30° $= \frac{1}{2}$ sin. tot. (§. 4.)

Es sey ferner JAG ein Bogen von 90°; so ist die Hälfte der Sehne JG der Sinus von 45°; nun ist aber $JG = \sqrt{(JC^2 + GC^2)} = \sqrt{2}$ nach der Voraussetzung folglich ist sin. 45° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ Halbm. $= \frac{1{,}4142\ldots}{2} = 0{,}7071\ldots$ Halbm. $=$ $\frac{17}{24}$ Halbm. beynahe.

Es ist also

sin. 30°: Halbm. oder sin. tot. $= 1 : 2$ genau;

und sin. 45°: Halbm. oder sin. tot. $= 17 : 24$ beynahe.

Giebt man allen Brüchen, durch welche das Verhältniß der schiefen Winkel zum Sinus totus ausgedrückt wird, einerley Nenner, d. h. nimmt man den Halbmesser beständig in dieselbe Anzahl gleicher Theile getheilt an: so verhalten sich die Sinusse jeder zwey Winkel, wie die Zähler der Brüche, durch welche sie ausgedrückt werden. So verhält sich, weil $\frac{1}{2}$ sin. tot. $=$ $\frac{1}{2}\frac{2}{4}$ sin. tot.

sin. 45° : sin. 30° $=$ 17 : 12. *)

§. 10.

Nach diesen vorausgeschickten Erklärungen vom Sinus denke man sich den Quadranten AB in Bogen von 1′, d. h. in 90. 60 $=$ 5400 gleiche Theile getheilt, und aus jedem Theilungspunkte Perpendikel oder Sinusse, wie JD, auf den Halbmesser AC gefällt. Denkt man sich eben diesen Halbmesser getheilt in eine große Anzahl gleicher Theile z. B in 100000: so ist klar, daß ein jedes Perpendikel eine gewisse Anzahl dieser Theile des Halbmessers enthält.

Wäre man nun durch irgend ein Mittel im Stande, die Anzahl dieser Theile eines jeden Perpendikels zu bestimmen: so könnten, wie man leicht einsieht, diese Linien zur Größenbestimmung der Winkel füglich angewendet werden.

Man würde nämlich dann in einer Columne die Minuten von 0° zu 90°, und dieser gegenüber eine

---

*) Man sehe hierüber, besonders was die Geschichte angeht, Pfleuderer's eb. Trig. v. S. 20—37.

eine andere Columne ſetzen, welche die Anzahl jener Theile jedes korreſpondirenden Perpendikels enthielte. — Mittels einer ſolchen Tafel könnte man nun immer die Anzahl der Grade eines Winkels angeben, ſobald die Anzahl der Theile des korreſpondirenden Perpendikels oder Sinus bekannt wären, und umgekehrt.

Dieſe für die Sinuſſe aufgeſuchte Zahlen wären dann zur Abkürzung der Rechnung ein für allemal berechnete Zahlen, die in allen Fällen gälten (numeri conſtantes, dergleichen 3,14159...) um dadurch alles Unbekannte zu berechnen; d. h. dieſe Tafel gewährte dann den genannten Vortheil nicht nur für Bogen oder Winkel, deren Halbmeſſer wirklich dieſelbe Anzahl gleicher Theile enthielte, welche man dem der Tafel zum Grunde liegenden Halbmeſſer willkührlich gab; ſondern auch für jeden andern Bogen oder Winkel, deſſen Halbmeſſer bekannt iſt.

Es ſey z. B. des Winkels ACG Schenkel oder der Halbmeſſer AC = 8 Schuh, und das Perpendikel AF = 3 Schuh; CB aber ſtelle den Halbmeſſer vor, für welchen man die Tafeln berechnete. Denkt man ſich nun den Bogen BE und das Perpendikel BD gezogen: ſo iſt letzteres der Sinus der Tafeln. Fig. 4.

Wie viel nun gleiche Theile aus dem Halbmeſſer dieſes Perpendikel enthalte, kann man we-

gen der Aehnlichkeit der Dreyecke ACF und BCD leicht durch diese Analogie finden:

$$AC : AF = BC : BD$$

$$8^{1} : 3^{1} = 10000 : BD,$$

woraus denn $BD = 37500$. Suche ich nun diese Zahl in den Sinustafeln auf; so finde ich ihr die Anzahl der Grade und Minuten des Winkels ACG oder ACF beygeschrieben.

Und umgekehrt:

Es sey die Anzahl der Graden und Minuten des Winkels ACG und sein Halbmesser AC gegeben: so kann man den Werth des Perpendikels AF finden. Denn aus den Sinustafeln kann man die dem gegebenen Winkel entsprechende Anzahl der gleichen Theile des Halbmessers, welche das zu ihm gehörige Perpendikel oder der Sinus BD enthält, finden. Aus der Proportion aber

$$BC : BD = AC : AF$$

findet man, da die 3 ersten Terminen bekannt sind, das gesuchte AF, oder den korrespondirenden Sinus.

Man sieht auf diese Art deutlich ein, wie bey der Berechnung der Dreyecke vorerst die Sinusse den Winkeln substituirt werden können (§. 1.)

§. 11.

Weil der Winkel JCB den Winkel JCA zum rechten, oder der Bogen JB den Bogen JA zum Quadranten ergänzt (complirt): so könnte man auch JE den Sinus des Complements nennen.

nen. Des kürzern Ausdruckes wegen haben ihn die Mathematiker den Cosinus genannt; weil ferner JE = DC, so wird auch der Cosinus so definirt: Cosinus ist das zwischen dem Sinus und dem Mittelpunkte des Kreises liegende Stück des Halbmessers.

Läßt man wieder, wie §. 8., die Sehne GJ von 0° bis 90° fortrücken: so sieht man, daß die Cosinusse im ersten Quadranten vom Halbmesser an immer abnehmen, bis sie in C völlig verschwinden. Durch 0 geschieht dann der Uebergang in den 2ten Quadranten, wo sie von 0 bis H immer wachsen, so, daß der Kosinus beym Verschwinden des Sinus in H wieder dem Halbmesser gleich wird.

Wenn man folglich die Cosinusse für den ersten Quadranten positiv nennt; so müssen sie im zweyten, wo sie eine den vorigen entgegengesetzte Lage haben, negativ werden. — Man sieht ferner, daß die Cosinusse im dritten Quadranten vom Halbmesser bis zu 0 wieder abnehmen; im 4ten aber von 0 bis zum Halbmesser wieder wachsen; jene negativ, diese positiv.

Die Cosinusse sind folglich im 1ten und 4ten Quadranten positiv, im 2ten und 3ten negativ.

In Ansehung der Vervielfältigung der Peripherie bleibt dasselbe Verhältniß, wie es auch blieb bey den Sinussen (§. 8.)

Zusatz 1. Wenn folglich der stumpfe Winkel ACF den rechten genau um eben so viel über-

trifft, als dem spitzen ACJ zu einem rechten fehlt; d. h. wenn der Winkel BCF = BCJ, folglich auch FCH = JCA: so ist JD = FK, und CD = CK; d. i. $\pm$ sin. ACF = $\pm$ sin. ACJ (§. 8.); aber $\pm$ cosin. ACF = $\mp$ cosin. ACJ (§. 11.)

Zusatz 2. Da $JC^2 = JD^2 + DC^2$, oder auch $CF^2 = FK^2 + CK^2$: so ist das Quadrat des Sinus totus immer der Summe der Quadraten des Sinus und Cosinus des fraglichen Winkels gleich.

Zusatz 3. Wenn AJ = 45°, so ist auch DJC = 45° und CD = DJ d. i. sin. 45° = cosin. 45°.

Schol. Einige Schriftsteller des 16ten Jahrhunderts gebrauchen die Benennung sinus rectus (zum Unterschied von sinus versus) und sinus rectus secundus für Sinus und Cosinus. Rhaeticus und Vieta nennen Sinus und Cosinus Perpendiculum und Basis.

Die Einführung der Abkürzung Cosinus statt Complementi sinus rührt wahrscheinlich von Edmund Gunter her, Prof. der Astronomie in Gresham Colledge zu London seit 1619, gestorben 1626. *)

§. 12.

Sinus versus (Sagitta der Alten) ist der zwischen dem Anfangspunkte eines Bogens und dem dazu

*) S. Pfleud. S. 101—103.

dazu gehörigen Sinus liegende Theil des Halbmessers.

Der Sinus versus der Ergänzung des Winkels ACJ (Fig. 3.) zum rechten, oder des Bogens AJ zum Quadranten heißt Cosinus versus. Dieser ist nach unserer Figur BE, so wie AD der Sinus versus.

Dieser Sprachgebrauch entstand, als man nur spitze Winkel berücksichtigte. Wenn man aber auch den stumpfen Winkel ACF betrachtet: so wird FK der Sinus und AK der Sinus versus von ACF. Der Winkel FCB, welcher nun negativ ist, weil er eine dem Winkel BCJ entgegengesetzte Lage hat, bleibt die algebraische Ergänzung des Winkels BCJ zum rechten; also ist in eben dem Sinne, wie oben FE der Cosinus, BE der Cosinus versus des Winkels ACJ.

§. 13.

Setzt man den Halbmesser = 1 und den Bogen z. B. AJ, worauf sich alle trigonometrische Linien in unserer Fig. beziehen, = α: so ist nach der Erklärung sin. vers. α = 1 — cos. α, und cos. vers. α = 1 — sin. α (BE = BC — EC = BC — JD).

Aus diesen Formeln erhellen vorerst die Veränderungen des Sinus versus.

Setzt man nämlich α = 90°, so wird cos. α = 0 (§. 11.), folglich sin. vers. α = 1. d. h. wächst der spitze Winkel ACJ, oder der Bogen AJ; so

wächst auch der Sinus versus AD, so lange bis ACJ ein rechter Winkel, oder AJ = 90° wird. In diesem Falle fällt J in B und D in C, und es wird AD = AC = dem Sinus totus.

Wird 2) $\alpha > 90°$: so wird der Cos. α negativ (§. 11.), folglich wird sin. vers. $\alpha = 1 + \cos.\alpha$. — Wird vollends $\alpha = 180°$: so ist, weil dann Cos. $\alpha = -1$, sin. vers. α, oder sin. vers. $180° = 1 + 1 = 2$. — Der Sinus versus wächst also im ersten und zweyten Quadranten bis zum Durchmesser.

Zweytens. Wird $\alpha = 90°$: so ist, weil sin. $90° = 1$, cos. vers. $\alpha = 0$; d. i. wächst der spitze Winkel ACJ: so wird der Cosinus versus immer kleiner, bis er verschwindet, wenn J in B fällt. — Wird 2) $\alpha = 180°$; so ist sin. $\alpha = 0$, folglich cos. vers. $\alpha = 1$; d. i. rückt J über B hinaus nach F: so sieht man leicht, daß der Cosinus versus wieder größer wird, indem sin. α immer kleiner wird, und daß denn, wenn F mit H zusammenfällt, der Cosinus versus dem Halbmesser gleich ist.

Ohne mich hiebey länger aufzuhalten, sieht man aus beyden Formeln zugleich ein, daß, welche Veränderungen auch mit dem Quersinus und Cosinus versus vorgehen mögen, beyde doch immer positiv bleiben müssen, weil sin. α, cos. α nie die Einheit übersteigen können, daß folglich für jene beyde, wenn auch sin. α, cos. α negativ werden, doch 2 die Gränze ihres Wachsens ist.

§. 14.

§. 14.

Die Tangente eines Bogens ist die auf den durch seinen Anfangspunkt gehenden Halbmesser senkrecht gezogene Linie, begränzt von dem durch den andern Endpunkt des Bogens fortgezogenen Halbmesser.

Diese Erklärung gilt, wie man einsieht, nur in Ansehung spitzer Winkel, oder solcher Bogen, die $< 90°$ sind, worauf man zu allererst die trigonometrischen Linien bezieht; so ist für den Winkel ACJ oder des Bogens AJ Tangente das Perpendikel TA; der fortgezogene Halbmesser CJ, dem sie in T entgegenkömmt, heißt die Sekante, nämlich CT.

Auf gleiche Art, wie man den Sinus des Complementwinkels Cosinus nannte, heißt auch die Tangente des Winkels, welcher den spitzen Winkel ACJ zum rechten, oder des Bogens, welcher den Bogen AJ zum Quadranten ergänzt, die Cotangente, BF; so wie auch derselbe fortgezogene Halbmesser CJ, der sie in F begränzt, die Cosekante genannt wird.

§. 15.

Indem man vorerst alle diese Linien auf denselben spitzen Winkel α bezieht; findet man leicht alle sie ursprünglich ausdrückende Formeln, wo der Halbmesser wieder $= 1$ gesetzt wird.

1. Weil JD mit TA parallel ist: so gilt in den ähnlichen Dreyecken ACT und DCJ die Proportion:

CD:

$$CD : DJ = AC : AT.$$

d. i. $\cos.\alpha : \sin.\alpha = 1 : \text{tang.}\alpha$

$$\sin.\alpha$$

Also $\text{tang.}\alpha = \frac{\quad}{\quad}$.

$$\cos.\alpha$$

2. In den ähnlichen Dreyecken ACT und BCF ist

$$AT : AC = BC : BF$$

d. i. $\text{tang.}\alpha : 1 = 1 : \cot.\alpha$

$$1$$

Also $\cot.\alpha = \frac{\quad}{\quad}$.

$$\text{tang.}\alpha$$

3. In den ähnlichen Dreyecken DJC und ACT ist

$$CD : CJ = AC : CT$$

d. i. $\cos.\alpha : 1 = 1 : \sec.\alpha$.

$$1$$

Also $\sec.\alpha = \frac{\quad}{\quad}$.

$$\cos.\alpha$$

4. Aus den ähnlichen Dreyecken CDJ und CFB erhält man

$$DJ : CJ = BC : CF$$

d. i. $\sin.\alpha : 1 = 1 : \text{cosec.}\alpha$.

$$1$$

Also $\text{cosec}\,\alpha = \frac{\quad}{\quad}$.

$$\sin.\alpha$$

§. 16.

Die mit diesen Linien, wenn man, wie oben, JG fortbewegen läßt, vorgehenden, und aus dem Anblicke der Figur ersichtlichen Veränderungen und Folgen erhellen zugleich aus den §. 15. angeführten Formeln; wobey man sich dessen, was vom

Sinus

Sinus und Cosinus gesagt worden ist, erinnern muß.

a. Die Cotangente hat mit der Tangente; die Sekante mit dem Cosinus; die Cosekante mit dem Sinus stets einerley Zeichen.

b. Wenn $\alpha < 90°$: so sind alle jene Linien positiv; wächst α: so wachsen auch tang. α, sec. α, weil dann sin. α wächst, und cos. α abnimmt.

c. Wird $\alpha = 90°$: so ist, weil sin. $90° = 1$, und cos. $90° = 0$, tang. $\alpha = \frac{1}{0} = \infty$; sec. $\alpha = \frac{1}{0} = \infty$.

Bezeichnet π den Bogen von $180°$ oder den halben Umfang, und α immer den spitzen Winkel, oder einen Bogen $< 90°$, : so ist

d. $\text{tang.}(\pi - \alpha) = \frac{\sin.(\pi-\alpha)}{\cos.(\pi-\alpha)} = \frac{\sin.\alpha}{-\cos.\alpha} = -\text{tang.}\,\alpha$.

$\text{sec.}(\pi - \alpha) = \frac{1}{\cos.(\pi-\alpha)} = \frac{1}{-\cos.\alpha} = -\text{sec.}\,\alpha$.

e. $\text{tang.}\,(\pi + \alpha) = \frac{\sin.(\pi+\alpha)}{\cos.(\pi+\alpha)} = \frac{-\sin.\alpha}{-\cos.\alpha} = +\text{tang.}\,\alpha$.

$\text{sec.}\,(\pi + \alpha) = \frac{1}{\cos.(\pi+\alpha)} = \frac{1}{-\cos.\alpha} = -\text{sec.}\,\alpha$.

f. $\text{tang.}\,(2\pi - \alpha) = \frac{\sin.(2\pi-\alpha)}{\cos.(2\pi-\alpha)} = \frac{-\sin.\alpha}{\cos.\alpha} = -\text{tang.}\,\alpha$.

sec.

$$\text{sec.}(2\pi-\alpha) = \frac{1}{\text{col.}(2\pi-\alpha)} = \frac{1}{\text{col.}\,\alpha} = +\,\text{sec.}\,\alpha.$$

Dieß heißt: Im 1ten und 3ten Quadranten wachsen die Tangenten von o an bis ∞; im 2ten und 4ten nehmen sie von ∞ ab bis wieder zu o. Auch sind sie im 1ten und 3ten Quadr. positiv, im 2ten und 4ten negativ.

Die Sekanten aber wachsen im 1ten und 3ten vom Halbmesser bis ∞, und nehmen im 2ten und 4ten Quadranten von da bis wieder zum Halbmesser ab. Auch sind sie im 1ten und 4ten Quadranten positiv, im 2ten und 3ten negativ.

§. 17.

Aehnliche Folgen für die Cotangente und Cosekante sind leicht aus ihren Formeln herzuleiten.

a. Wächst α: so nimmt die Cotangente und Cosekante ab, weil sin. α, und tang. α wachsen.

b. Wird $\alpha = 90°$; so ist $\text{cot.}\,\alpha = \frac{\text{col.}\,90°}{\text{sin.}\,90°} = \frac{0}{1} = 0$, und $\text{cosec.}\,90° = \frac{1}{\text{sin.}\,90°} = \frac{1}{1} = 1.$

c. $$\text{cot.}(\pi-\alpha) = \frac{1}{\text{tang.}(\pi-\alpha)} = \frac{1}{-\text{tang}\,\alpha} = -\,\text{cot.}\,\alpha.$$

$$\text{cosec.}(\pi-\alpha) = \frac{1}{\text{sin}(\pi-\alpha)} = \frac{1}{\text{sin}\,\alpha} = +\,\text{cosec.}\,\alpha.$$

d. cot

$$d.\ \cot.(\pi \pm \alpha) = \frac{1}{\tang.(\pi \pm \alpha)} = \frac{1}{\tang.\alpha} = \pm \cot.\alpha.$$

$$\cosec.(\pi \pm \alpha) = \frac{1}{\sin.(\pi \pm \alpha)} = \frac{1}{-\sin.\alpha} = -\cosec.\alpha.$$

$$e.\ \cot.(2\pi - \alpha) = \frac{1}{\tang.(2\pi - \alpha)} = \frac{1}{-\tang\alpha} = -\cot.\alpha.$$

$$\cosec.(2\pi - \alpha) = \frac{1}{\sin.(2\pi - \alpha)} = \frac{1}{-\sin\alpha} = -\cosec.\alpha.$$

Dieß heißt: Cotangente und Cosekante nehmen im 1ten und 3ten Quadr. vom ∞, jene bis 0, diese bis zum Halbmesser ab; im 2ten und 4ten wachsen beyde jene über 0, diese über den Halbmesser bis wieder zum ∞. Auch ist die Cotangente im 1ten und 2ten Quadr. positiv, im 3ten und 4ten negativ.

Zusatz 1. Alle trigonometrischen Linien sind im ersten Quadranten positiv.

Zusatz 2. Tangente und Cotangente können von der Gränze 0 bis zur Gränze ∞ wachsen; Sekante und Cosekante können nie kleiner als 1 werden.

Zusatz 3. Es ist $\tang.\ 45° = 1 = \cot.45°$ (§. 11. Zus. 3.)

§. 18.

Folgende Tabelle gewährt eine Uebersicht des bisher über das Wachsen und Abnehmen der trigono-

gonometrischen Linien Gesagten für den ersten und zweyten Quadranten. Aus dem beygefügten ersten Zusatze wird man leicht die Beschaffenheit jener Veränderungen für den dritten und vierten Quadranten folgern können.

Hiebey bezeichnet r den Halbmesser max. und min. den unter allen möglichen Werthen größten oder kleinsten Werth.

Werthe von α	$\alpha = 0$	α wächst v. 0° bis 90°	$\alpha = 90°$	α wächst v. 90°–180°	$\alpha = 180$
Sinus	0	wächst	r max.	nimt ab; +	0
Cosinus	r max	nimmt ab	0	wächst; —	--r max. neg.
Quersinus	0	wächst.	r	wird > r; +	2r max.
Quercosinus	r	nimmt ab	0 min.	wächst; +	r max.
Tangente	0	wächst über alle Gränz.	∞	nimt ab; —	0. max.
Sekante	r min	wächst über alle Gränz.	∞	nimt ab; —	r min.
Cotangente	∞	nimmt ab	0	wächst; —	∞
Cosekante	∞	nimmt ab	r min	wird > r; +	∞

Zusatz 1. Es ist aus dieser Tabelle klar, daß die Werthe der trigonometrischen Linien (der Quercosinus ausgenommen) wenn sie bis auf 0 gesunken, oder bis zum ∞ gestiegen sind, zwar wieder endlich werden, aber die entgegengesetzten Zeichen bekommen. Haben sie aber nur ein Maximum oder Minimum erreicht; so nehmen sie hernach ab oder zu, bleiben aber positiv oder negativ, wie sie vorher waren.

Zusatz 2. Man sieht ein, daß bey diesen Veränderungen in demselben Kreise oder für denselben Halbmesser die Tangente und Sekante im 2ten

Qua-

Quadranten unter eben derselben Länge wie im 1ten vorkommen müsse, wie dieß der Fall beym Cosinus war (§. 11.). nur daß auch hier die Lage derselben in eine entgegengesetzte verändert wird.

So sind z. B. die Tang. HN und die Sek. CN des stumpfen Winkels HCJ der Tang. $\begin{bmatrix} AT \\ HS \end{bmatrix}$, und Sek. $\begin{bmatrix} CT \\ CS \end{bmatrix}$ seines Supplements $\begin{bmatrix} ACJ \\ HCM \end{bmatrix}$ völlig gleich der Länge nach; aber die Tangenten haben in Ansehung des Halbmessers HC, die Sekanten in Beziehung auf die gerade Linie CJ eine entgegengesetzte Lage. Fig. 5.

Dasselbe findet statt bey den Cotangenten und Cosekanten.

Daher ist

$$\pm \text{ Tang. HCJ} = \mp \text{ tang ACJ} = \mp \text{ tang.} (180° - \text{HCJ}).$$

Eben so:

$$\mp \text{ Cot. HCJ} = \pm \text{ cot. ACJ} = \pm \text{ cot.} (180° - \text{HCJ}).$$

Und $\pm$ Sec. HCJ $= \mp$ sec. ACJ $= \mp$ sec. $(180° - \text{HCJ})$.

Eben so:

$\mp$ Cosec. HCJ $= \pm$ cosec. ACJ $= \pm$ cosec. $(180° - \text{HCJ})$.

Zusatz 3. Auf die genaue Kenntniß der Natur der trigonometrischen Linien oder Funktionen gründet sich die Verwandlung derselben, wenn sie sich im zweyten, dritten und vierten Quadranten befinden, in die gleichen trigonometrischen Funktionen des ersten Quadranten; welche Verwandlung bey vielen astronomischen Aufgaben vom vorzüglichen Nutzen ist.

Es sey $x < 90°$,
und $R = 90°$.

$$\begin{aligned}
\sin. x &= + \sin. (2R - x) &&= + \cos. (R - x)\\
&= - \sin. (2R + x) &&= - \cos. (R + x)\\
&= - \sin. (4R - x) &&= - \cos. (3R - x)\\
& &&= + \cos. (3R + x).\\
\cos. x &= - \cos. (2R - x) &&= + \sin. (R - x)\\
&= - \cos. (2R - x) &&= + \sin. (R + x)\\
&= + \cos. (4R - x) &&= - \sin. (3R - x)\\
& &&= - \sin. (3R + x).\\
\tang. x &= - \tang. (2R - x) &&= + \cot. (R - x)\\
&= + \tang. (2R + x) &&= - \cot. (R + x)\\
&= - \tang. (4R - x) &&= + \cot. (3R - x)\\
& &&= - \cot. (3R + x).\\
\cot. x &= - \cot. (2R - x) &&= + \tang. (R - x)\\
&= + \cot. (2R + x) &&= - \tang. (R + x)\\
&= - \cot. (4R - x) &&= + \tang. (3R - x)\\
& &&= - \tang. (3R + x).
\end{aligned}$$

§. 19.

Aus dem §. 11. Zus. 1. und §. 18. Zus. 2. Erklärten leuchtet von selbst der Beweis für den Satz ein:

Zu Winkeln oder Bogen, die einander zu 180° ergänzen, gehören einerley trigonometrische Linien der absoluten Größe nach.

So ist z. B. Fig. 5. JD = MQ; CD = CQ; BF = BR u. s. w. Nur der einzige Quersinus muß ausgenommen werden; so ist dieser (AQ) um den doppelten Cosinus (DC + CQ) größer als AD. Der Quercosinus FE aber bleibt im genannten Falle derselbe (§. 12).

Uebrigens kann der Beweis auch dann leicht aus dem von den trigonometrischen Funktionen bisher Vorgetragenen geführt werden, wenn man den Satz auch auf die erhabenen oder einwärtsgehenden Winkel ausdehnt; wie z. B. dieses Karsten in des 2ten Th. 1sten Abth. des Lehrb. der gesammten Mathem. §. 411. that.

§. 20.

Lehrs. Alle trigonometrischen Linien, die zu einerley Winkel oder Bogen gehören, verhalten sich wie die Halbmesser der Kreise, in welchen man sie zieht.

Beweis. Man ziehe aus des Winkels ACB Spitze mit CA, Ca die ähnlichen Bogen AB, Fig. 6.

AB, ab und dann ihre trigonometrischen Linien: so ist

$$Cb : CB = bd : BD = Cd : CD$$

und $Cb : CB = Ca : CA = ae : AE = Ce :$ CE u. s. f.

folglich auch $Ca : ae = CA : AE$ u. s. w.

§. 21.

Aus dem vorigen §. folgt, daß sin. ACB $= \frac{BD}{CA} = \frac{bd}{Ca}$; tang. ACB $= \frac{AE}{CA} = \frac{ae}{Ca}$ u. s. w. sey; d. h. daß allen trigonometrischen Linien, die zu einerley Winkel oder Bogen gehören, immer einerley Verhältniß zum Halbmesser zukömmt; oder daß sie immer gleichviel Theile von jedem Halbmesser, worauf man sie bezieht, enthalten. Wenn man daher den Halbmesser zum Maaßstab annimmt: so kann man immer fragen, wie vielmal die trigonometrischen Linien diesen Maaßstab oder aliquote Theile desselben enthalten.

So erhellt das, was oben §. 10. vom Sinus gesagt worden, auch von den übrigen trigonometrischen Linien.

§. 22.

Aus §. 21. in Vergleichung mit §§. 10. 15. wird ersichtlich:

1) Daß man sich nebst den Sinussen auch der Tangenten, Sekanten u. d. übr. trigon. L. zur Berech-

rechnung der Dreyecke bedienen könne, indem der Werth aller dieser Linien aus den gefundenen Sinussen angegeben werden kann.

2) Daß nunmehr jene Ausdrücke sin. α; tang. α; sec. α u. s. w. nicht Linien, sondern Zahlen andeuten, die dem Winkel oder Bogen α angehören, und durch das Verhältniß eines beliebig angenommenen und getheilten Halbmessers zu den trigonometrischen Linien bestimmt werden. Diesemnach bedeutet uns sin. α^2; tang α^2 u. dg. nicht etwa den Sinus vom Quadrate des Bogens α; sondern das Quadrat derjenigen Zahlengröße, welche in Vergleichung mit einem gewissen Halbmesser für den Winkel α gefunden ist.

Man sieht daraus, daß die Trigonometrie eigentlich eine weitere Anwendung der Arithmetik auf Geometrie ist §. 1. d. Einl.

Schol. Im Occident hat zuerst Johannes Müller, 1436 geb. zu Königsberg in Franken, gest. zu Rom 1476, der auch gewöhnlich von seinem Geburtsorte Regiomontanus genannt wird, den Gebrauch der Tangenten in dem trigonometrischen Calcul eingeführt; auch hat er eine Tafel derselben, aber nur für ganze Grade, für den Halbmesser = 100000 verfertigt. Erasmus Reinhold, Prof. der Mathem. zu Wittenberg, geb. 1511, gest. 1553, dehnte seinen für den Halbmesser = 10,000,000 berechneten Kanon (Canonem

foecundum) auf einzelne Minuten aus. Georg Joachim Rhäticus, von seinem Vaterlande so genannt, (geb. 1514 zu Feldkirch in Voralberg, einem Theile des alten Rhätien, gest. 1574) hat erstlich die Tangenten, wie die Sinusse, von 10—10 Sekunden für den Halbmesser = 1000 000 000 000 000 000 berechnet. Von einer früheren (als die genannten Tafeln) orientalischen Tangententafel in Sechzigtheilen u. s. w. des Halbmessers nach Ptolemäischer Art enthalten des H. v. Zach allgem. geogr. Ephemeriden, III. B. 2. St. und IV. B. 2. St. Febr. u. Aug. 1799. aus Briefen des H. Dr. Burkhardt in Paris Nachricht. *).

§. 23.

Da sich, wie ich im vorigen §. bemerkte, das Auffinden der Zahlen für Tangenten, Sek. u. s. w. größtentheils auf die aufgefundenen Sinusse in einem bestimmten Systeme reduzirt: so hat man, um einen Begriff von der Aufstellung einer Sinus—Tangenten... Tafel, welche man bey der Resolution der Dreyecke anwendet, zu geben, eigentlich nichts nöthig, als deutlich darzulegen, auf welche Art man für einen zum Grunde gelegten Halbmesser die Sinusse, oder eine Sinustafel, von der ich im 10ten §. sprach, berechnen könne. Da die hie-

*) Man sehe Pfleid. Trigon. von S. 120—136. verglichen mit Karsten's Lehrb. d. Mathem. 2 Th. I. Abth. §. 436.

hiebey vorkommenden Sätze auch noch in anderer Rücksicht unentbehrlich, oder doch von wichtiger Anwendbarkeit sind: so bedarf es kaum einer Entschuldigung, daß ich mich bey diesem Gegenstande nicht auf die Wirklichkeit berufe, um so meine Leser auf die Möglichkeit der Konstruktion der Sinustafeln bloß schließen zu lassen.

§. 24.

Aufg. 1. Aus dem gegebenen Sinus eines Winkels α dessen Cosinus zu finden.

Aufl. Man ziehe vom Quadrate des Halbmessers das Quadrat des gegebenen Sinus ab, und aus dem Reste ziehe man die Quadratwurzel aus.

Der Beweis erhellt aus §. 11. Zus. 2.

Zum Beyspiel: Setzt man, wie §. 10, den Halbmesser $= 100000$: so ist $\cos. 30° = \sqrt{(100000^2 - 50000^2)}$ (§. 9.) $= \sqrt{(7500000000)} = 86603$, oder diese Zahl ist der Sinus von 60°.

§. 25.

Aufg. 2. Aus dem gegebenen Sinus des Bogens AD den Sinus des halben Bogens AO zu finden.

Aufl. Man suche zuerst des gegebenen Sinus Cosinus EC und Quersinus AE (§§. 24. 13); Fig. 7.

so ist dann $AO = \frac{AD}{2} = \frac{\sqrt{(DE^2 + EA^2)}}{2}$ (§. 4).

§. 26.

Aufg. 3. Aus dem gegebenen Sinus AO des Bogens AF den Sinus DE des doppelten Bogens AD zu finden.

Aufl. Man suche den Cosinus CO des gegebenen Sinus AO (§. 24.), und stelle die Proportion an:

r : cos. AO = 2 sin. AO : sin. DA.

Beweis. Denn die Dreyecke AOC, AED sind rechtwinklicht und ähnlich; folglich ist

AC : CO = AD : DE.

§. 27.

Fig. 8. Aufg. 4. Es seyen die Sinusse zweyer Bogen EB und ED gegeben; man soll den Sinus ihrer Summe oder ihrer Differenz finden.

Aufl. Hat man vorerst die Cosinusse derselben Bogen gefunden: so multiplizirt man dann den Sinus des ersten Bogens mit dem Cosinus des zweyten, und den Sinus des zweyten mit dem Cosinus des ersten.

a. Die Summe nun von beyden Produkten, durch den Halbmesser dividirt, ist der Sinus der Summe beyder Bogen; und

b. Den Unterschied jener Produkte, durch den Halbmesser dividirt, ist der Sinus des Unterschiedes der 2 Bogen.

Beweis. Man mache EF = ED, und ziehe die Sehne FD, welche dann vom Halbmesser CE

in

in zwey gleiche Theile FJ = JD geschnitten wird. Aus den Punkten D, J, E, F fälle man die Perpendikel DL, JK, EH, FG auf den Halbmesser BC. Endlich ziehe man aus F und J FN uud JM parallel mit BC. Weil nun FD in zwey gleiche Theile getheilt ist; so ist auch DM = MN. Denn die Parallellinie JM schneidet die Seiten des Dreyeckes DFN proportionell.

Nun besteht DL, d. i. der Sinus der Summe beyder Bogen, aus LM und MD, oder aus KJ und MD;

FG aber, d. i. der Sinus von BF, oder der Differenz beyder Bogen, ist = LN = LM — MN = KJ — MD.

Es folgt also, daß man die Werthe von MD und KJ addiren müsse, um den Sinus der Summe —, und MD von KJ abziehen, um den Sinus des Unterschiedes zu haben.

Man suche nun die Werthe von KJ und MD.

1.) In den ähnlichen Dreyecken CEH, CJK ist

CE : CJ = EH : JK

d. i. r : cos. ED = sin. EB : JK;

$$\text{also } JK = \frac{\sin. EB \,.\, \cos. ED}{r}.$$

2.) Die Dreyecke EHC und DJM sind ähnlich. Denn M = H; r = m = n (denn das Perpendikel Jx aus dem rechten Winkel J theils das

Dreyeck FJO in ähnliche Dreyecke, wo m = n) = E, folglich D = ECH; also ist

$$CE : CH = DJ : DM$$

d. i. $r : \text{cos. } EB = \text{sin. } ED : DM$;

$$\text{also } DM = \frac{\text{sin. ED. cos. EB}}{r}.$$

Nennt man also Kürze halber $ED = \beta$ und $EB = \alpha$: so ist

$$DL \text{ oder } \text{sin.}(\alpha + \beta) = \frac{\text{sin. } \alpha \text{ cos. } \beta + \text{sin. } \beta \text{. cos. } \alpha}{r}.$$

$$\text{und FG oder sin. } (\alpha - \beta) = \frac{\text{sin. } \alpha \text{ cos. } \beta - \text{sin. } \beta \text{ cos. } \alpha}{r}.$$

§. 28.

Aufg. 5. Es seyen die Sinusse zweyer Bogen gegeben, den Cosinus der Summe oder des Unterschiedes derselben Bogen zu finden.

Aufl. Nach gefundenen Cosinussen eines jeden einzelnen Bogens (§. 24.) multiplizire man den Cosinus des einen mit dem Cosinus des andern, eben so die Sinusse. Man erhält dann

a. den verlangten Cosinus der Summe, wenn man beyde Produkte von einander abzieht, und den Rest durch den Halbmesser dividirt.

b. Addirt man aber beyde Produkte, und dividirt ihre Summe durch den Halbmesser: so erhält man den verlangten Cosinus des Unterschiedes.

Beweis. Es bleibe Alles, wie zuvor nach Fig. 8. Es ist da GK = KL. Nun ist

CL d. i. der Cosinus der Summe = CK — KL = CK — JM;

CG d. i. der Cosinus des Unterschiedes = CK + KG = CK + JM.

Sucht man die Werthe für CK und JM: so findet man

1) in den ähnlichen △△ CEH, CJK

$$CE : CJ = CH : CK$$

d. i. $r : \cos. DE = \cos. EB : CK$;

$$\text{also } CK = \frac{\cos. DE . \cos. EB}{r};$$

2) in den ähnlichen △△ CEH und DJM

$$CE : EH = DJ : JM$$

d. i. $r : \sin. EB = \sin. DE : JM$;

$$\text{also } JM = \frac{\sin. EB . \sin. DE}{r}.$$

Also ist

$$CL \text{ oder } \cos.(\alpha + \beta) = \frac{\cos.\alpha \cos.\beta - \sin \alpha . \sin.\beta}{r}.$$

$$\text{und } CG \text{ oder } \cos.(\alpha - \beta) = \frac{\cos. \alpha . \cos. \beta + \sin.\alpha \sin.\beta}{r}.$$

§. 29.

Lehrs. Die Summe der Sinusse zweyer Bogen AB, AC verhält sich zum Fig. 9

Unter-

Unterschiede derselben Sinusse, wie die Tangente der halben Summe dieser Bogen zur Tangente des halben Unterschiedes.

Beweis. Man mache AD = AB, und ziehe auf AM senkrecht die Sehne BD, die Perpendikel CP, CF parallel mit AM, und aus dem Punkte F die Sehnen FB, FD. Beschreibt man endlich mit demselben Halbmesser, womit der ganze Kreis oder der Bogen BA beschrieben ist, den Bogen JGK aus F, und errichtet vom Punkte G aus, wo dieser Bogen die Linie CF schneidet, das Loth HL: so sieht man, daß GH und GL die Tangenten sind der Winkel GFH und GFL, oder der W. CFB und CFD, welche die Hälfte der Bogen CB, CD d. i. den halben Unterschied und die halbe Summe der Bogen AB, AC zum Maaße haben.

Also sind GL und GH die Tangenten der halben Summe und der halben Differenz jener 2 Bogen.

Nun ist aber, weil DS = BS,

1) DE = BS + SE = BS + CP, d. i. = der Summe der Sinusse beyder Bogen;

2) BE = BS — SE = BS — CP, d. i. = dem Unterschiede der Sinusse beyder Bogen.

Es ist aber, weil BD parallel mit HL,

DE : BE = GL : GH;

Also

Also, wenn AB wieder $= \alpha$ und AC $= \beta$ gesetzt wird,

$$\text{sin.}\alpha + \text{sin.}\beta : \text{sin.}\alpha - \text{sin.}\beta = \text{tang}\frac{\alpha+\beta}{2} : \text{tang}\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

§ 30.

Lehrs. Die Summe der Cosinusse zweyer Bogen verhält sich zum Unterschiede dieser Cosinusse, wie die Cotangente der halben Summe der zwey Bogen zur Tangente ihres halben Unterschiedes.

Beweis. Da die Cosinusse nur Sinusse der Ergänzungen (Complemente) sind: so folgt aus dem vorhergehenden Lehrsatze, daß sich die Summe der Cosinusse zu ihrem Unterschiede verhält, wie die Tangente der halben Summe der Ergänzungen zur Tangente des halben Unterschiedes derselben Ergänzungen.

Eben so ist die Cotangente nur die Tangente der Ergänzung. Ferner die halbe Summe der Ergänzungen beyder Bogen ist das Complement der halben Summe beyder Bogen, und der halbe Unterschied der Ergänzungen dieser Bogen ist derselbe, als der halbe Unterschied dieser Bogen; folglich ist

$$\text{cos.}\alpha + \text{cos.}\beta : \text{cos.}\alpha - \text{cos.}\beta = \text{cot.}\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta).$$

§. 31.

§. 31.

Dieses vorausgesetzt, wird es nun nicht mehr schwer halten, einzusehen, wie man Sinustafeln für einen bestimmten Halbmesser habe verfertigen können.

1) Nach §. 9. ist der Sinus 30° *) gleich der Hälfte des Halbmessers; man kann daher nach §. 25. den Sinus von 15°; $7^\circ\,30^{\mathrm{I}}$; $3^\circ\,45^{\mathrm{I}}$; $1^\circ\,52^{\mathrm{I}}\,30^{\mathrm{II}}$; $0^\circ\,56^{\mathrm{I}}\,15^{\mathrm{II}}$; $0^\circ\,28^{\mathrm{I}}\,7^{\mathrm{II}}\,30^{\mathrm{III}}$; $0^\circ\,14^{\mathrm{I}}\,3^{\mathrm{II}}\,45^{\mathrm{III}}$; $0^\circ\,7^{\mathrm{I}}\,1^{\mathrm{II}}\,52^{\mathrm{III}}\,30^{\mathrm{IV}}$ ... finden.

2) Werden die Bogen sehr klein: so unterscheiden sie sich nicht merklich von ihren Sinussen, welchen sie daher beynahe proportionell sind. Man findet folglich sin. i. durch die Proportion.

Der Bogen von $0^\circ\,7^{\mathrm{I}}\,1^{\mathrm{II}}\,52^{\mathrm{III}}\,30^{\mathrm{IV}}$ verhält sich zum Bogen von $0^\circ\,1^{\mathrm{I}}$, wie sich verhält der Sinus des ersten Bogens zum Sinus von 1^{I},

Um die Sinusse von 1^{I} bis 3° wenigstens sehr nahe zu finden, ist es genug, den Sinus von 1^{I} nach und nach mit 2, 3, 4, 5... zu multiplizieren.

3) Die Sinusse von Bogen über 3° kann man nun nach §. 27. finden, wobey es besser ist, vorerst, ohne Rücksicht auf Minuten zu nehmen, die

*) Peurbach, von dem bald hernach die Rede seyn wird, nennt, indem ihm Kardaga ein Bogen von 15° ist den Sin. 30° sinum duarum Kardagarum simul.

die Sinusse der Bogen von ganzen Graden zu berechnen. Um dann von den zwischenliegenden Minuten die Sinusse zu finden, verfährt man auf folgende Weise:

Sobald der Bogen AB klein ist, z. B. arc. 1′: so werden die Differenzen Jn, Am der zwey Sinusse JG, BH beynahe proportionell den Differenzen AB, AJ der entsprechenden Bogen BP, JP. Man kann daher immer schließen: Fig. 10.

60′ verhalten sich zur Anzahl der fraglichen Minuten, wie sich verhält der Unterschied der Sinusse von zwey nächsten Graden zu x. Dieses x zum gefundenen Sinus hinzugethan, hat man den verlangten Sinus eines Bogens von Graden und Minuten.

Beysp. Man sucht sin. 8° 17′; Man habe gefunden sin. 8° (sin. AP) und sin. 9° (sin. AP + AB) = resp. 13917 und 15643; der Unterschied der Sinusse ist daher 1726; also

60′ : 17′ = 1726 : x; wo x = 489 beynahe; daher sin. 8° 17′ = 14406 beynahe.

4) Allein diese Verfahrungsart darf nicht wohl über die Gränze von 87° fortgeführt werden. Denn so wie sich die Bogen mehr dem Quadranten nähern: so kann doch io nicht mehr für die Differenz der Sinusse BH, FG genommen werden, indem das an und für sich kleine Stückchen Fo doch in einem merklichen Verhältnisse zu io steht. Fig. 11.

Zur

Zur Fortsetzung des Calculs bedient man sich daher dieses Lehrsatzes der Geometrie:

Fig. 12. Die Quadrate der Sehnen AC, AD etc. die durch die Endpunkte des Durchmessers AB gezogen sind, verhalten sich zu einander, wie die von den aus den Endpunkten der Sehnen auf den Durchmesser gefällten Perpendikeln abgeschnittenen Stücke AP, AO.

Ich führe den Beweis kurz so: die ähnlichen △△ ACP, ACB sind im Quadratverhältnisse der homologen Seiten, und, weil sie gleiche Höhe CD haben, so verhalten sie sich auch, wie die Grundlinien; also

$$ABC : APC = AB^2 : AC^2$$

und $ABC : APC = AB : AP.$

folglich $AB^2 : AC^2 = AB : AP.$ Auf dieselbe Art ist auch

$$AD^2 : AB^2 = AO : AB.$$

und compon. $AB^2 . AD^2 : AC^2 . AB^2 = AO . AB : AB . AP$

d. i. $AD^2 : AC^2 = AO : AP.$

Fig. 13. Es sind also die Unterschiede zwischen dem Halbmesser und den Sinussen BH, FG, nämlich DE, DJ proportionell den Quadraten der Sehnen BD, FD, oder, weil diese von den sehr kleinen Bogen BD, FD sehr wenig unterschieden sind, den Quadraten dieser Bogen selbst.

Hat

Hat man daher nach dem Vorhergehenden den sin. 87° gefunden: so weiß man auch den Unterschied zwischen diesem Sinus und dem Halbmesser; setzt folglich, um die Sinusse zwischen 87° und 90° zu finden:

Das Quadrat von 3° oder 180′ verhält sich zum Quadrat der Anzahl der Minuten der Ergänzung des fraglichen Bogens, wie der Unterschied zwischen dem Halbmesser und dem Sinus 87° zu x (= DJ).

Dieses x, vom Halbmesser CD abgezogen, giebt den Sinus CJ = FG des fraglichen Bogens.

Beysp. Es sey sin. 87° = 99863 gefunden; folglich der genannte Unterschied = 137; man soll finden den sin. 88° 24′, dessen Ergänzung = 96′; demnach ist

$$180'^2 : 96'^2 = 137 : DJ,$$ woraus DJ = 39 beynahe. Daher 100000—39 = 99961 = sin. 88° 24′, so wie man diesen Sinus wirklich in den unter unserer Voraussetzung berechneten Tafeln findet.

Zusatz 1. Hat man die Sinusse auf diese Art für den Quadranten berechnet: so hat man sie auch für den Halbkreis §. 6.

Zusatz 2. Auch kann man nach berechneten Sinussen leicht die Zahlen für die Tangenten, Secanten u. s. w. im Quadranten zuerst, und so fort für den Halbkreis finden §§. 23. 18. Zus. 2.

Schol. 1. Ich bin bey der Darstellung der Art, wie man Sinustafeln für den Halbmesser = 10000 berechnen könne, dem gefolgt, was Bezout in seinen Cours de Mathématiques 2. Th. S. 254... vorgetragen hat, weil mir dieselbe die deutlichste für Anfänger zu seyn schien. Für diese mag es indessen nicht ohne Nutzen seyn, wenn sie mit meiner Darstellung das vergleichen, was Mönnich in s. Lehrb. d. Mathem. 1. Th. S. 474... über denselben Gegenstand sagt, indem er den Halbmesser = 1 zum Grunde legt.

Schol. 2. Die Sinustafeln wurden für verschiedene Halbmesser ausgearbeitet §. 22. Schol. Die Alten gaben dem Halbmesser 60 gleiche Theile; jeden dieser Theile theilten sie wieder in 60^1 u. s. f. Diese unbequeme Sexagesimaleintheilung schaffte der berühmte Wiederhersteller der Astronomie Georg Peurbach um die Mitte des 10ten Jahrhunderts nach Chr. Geb. ab, und berechnete für den Halbm. = 600000 eine Sinustafel von 10 zu 10 Minuten. Regiomomontanus, Peurbachs Schüler, nahm denselben = 6000000, und in der Folge = 10000000 bey seinen Tafeln an. Nebst Copernicus (S. Copern. de lateribus et angg. triangg.) hat auch Petrus Apianus (Peter Bienewitz) geb. 1495., gest. 1552, Prof. zu Ingolstadt, eine auf einzelne Minuten ausgedehnte Sinustafel verfertigt. Den Canon des Rhäticus (S. das cit. Schol.) scheint Barth. Pitiscus, welcher

An=

Anfangs Tafeln für den Halbmesser = 10^7 und 1613 endlich in seinem Thesaurus für den Halbm. = 10^{15} lieferte, schon 1607 verbessert herausgegeben zu haben; er war erst 1596, von Rhäticus Schüler Val. Otto vollendet, unter dem Titel, „Opus Palatinum" herausgekommen. Weitläuftiger hievon handelt H. Pfleid. im angef. Buche v. S. 21—38.

§. 32.

Nach Erfindung der Logarithmen und eines bestimmten logarithmischen Systems, welche dem berühmten Schotten Neper (Napier, Baron von Marchiston), geb. 1550, gest. 1618, zugeschrieben wird *), war es wegen der großen Vortheile, welche die Logarithmen dem Calcul bringen, natürlich, daß man auch für die Zahlen der Sinusse u. s. w. Logarithmen substituirte, so, daß man nicht mehr nöthig hatte, zuerst die den Sinus ausdrückende Zahl, und dann ihren Logarithmus zu suchen; sondern man sogleich in den Tafeln die einem Winkel entsprechenden Logarith. Sinus und umgekehrt finden könnte.

*) Merkwürdig bleibt es indessen immer, daß man schon in Stifel's Arithm. integra 1544. III. 5. Fol. 249. b. folgende Reihe findet:

0	1	2	3	4	5	6
1	2	4	8	16	32	64

Man hat zu diesem Zwecke größere und kleinere Logarithmentafeln verfertigt. Nachrichten von größeren und merkwürdigen Logarithmentafeln giebt Kästner in der ersten Abh. d. 2. Samml. astr. Abh. Bey diesen setzte man den Halbmesser = 10000000000, folglich seinen Logarithm. = 10. Dabey gehen sie von 10 zu 10 oder gar bis zu einzelnen

Se-

Wobey erinnert wird, was bey der geometrischen Progression 1 ist, sey bey der arithmetischen 0. In der That liegt auch in den folgenden von Stifel aufgestellten Sätzen: „Qualiacunque facit progressio geometrica multiplicando et dividendo, talia facit progressio arithmetica addendo et subtrahendo“ und: 5 non solum significat, numerum sibi subscriptum facere propositionem quintam; sed etiam esse proportionem (rationem) quintuplicatam respectu primæ proportionis etc.“ Das ganze Fundament der Logarithmen. — Neper scheint jedoch für sich auf jene Erfindung gekommen zu seyn, welche er 1614 in descript. mirifici Canonis Logarithmorum bekannt machte. Er nahm nach Karsten's Untersuchung (Lehrb. d. Mathem. 2. Th § 146. 1. Ausg) den Halbmesser = 10^7, dessen Logar. = 0 an, und den Logar. von 10000000 — 1 = 9999999 setzte er = 1; sein Grundverhältniß ist also 10000000 : 9999999. Jedem folgenden Gliede dieser Reihe kommen denn die Logar. 2, 3, 4 .. zu, so, daß kleine Zahlen sehr große, Zahlen über 10 Mill. aber negative Logar. haben. Von Neper selbst wurde bald hernach Heinr. Brigg (zuletzt savillianischer Professor zu Oxford) ermuntert, ein logarithm. System für

das

Sekunden. Hieher gehört vorzüglich Trigonometria Brittannica, wo statt Min. $\frac{1}{100}$ Grade berechnet sind. Diese war schon von Heinr. Brigg angefangen, vollendet von Gellibrand (Prof. d. Astronomie in Greshams Kollegium zu London), und endlich auf Adr. Vlacqs Kosten zu Gouda 1633 herausgegeben.

In den kleineren Tabellen oder gemeinen Handausgaben der Tafeln, selbst in den Shervin'schen hat man von den vorigen Logarithmen die 3 letzten Ziffern weggelassen; was im Grunde eben so viel war, als hätte man den Halbmesser nur zu 10000000 angenommen, dessen Logarithm. folglich nur 7 hätte seyn können, so wie auch die Charakteristik der übrigen Logarithmen hätte um 3 vermindert werden müssen. Allein man ließ dieses, wie in den größeren Tabellen. Wirklich konnte daraus bey der Rechnung

das weit bequemere Grundverhältniß 1 : 10 auszuarbeiten. — Noch ist zu merken, daß Kästner (astron. Abhandl. 2. Samml. S. 70.) behauptet, daß Karstens Untersuchungsart unsicher, und die von ihm herausgebrachte Neper'sche Basis nur ziemlich nahe bey der sey, welche Neper's System erfodere. Den Irrthum Kästner's aber zeigte hernach selbst Karsten in der 2ten Ausg. s. Lehrb. S. 240.

Bey Nepers Schülern heissen nur die Logarithmen der Sinusse Logarithmen; die Log. aber der Cosinusse Antilogarithmen, die der Tangenten Mesologarithmen (wie bey Keppler und Bartsch) auch Differenzen (wie bey Ursin).

nung mit bloßen Logarithmen kein Fehler entstehen, weil man diese als Logarithmen der Linien für gewisse Winkel betrachtet, ohne auf die wirkliche Größe der Linien, sondern nur auf deren Verhältnisse zu sehen.

Ich bemerke noch, daß, ungeachtet die trigonometrischen Funktionen zuweilen negativ werden, sie doch immer dieselben Logarithmen behalten, indem das Zeichen die Funktion als Größe nicht affizirt, sondern nur die Entgegensetzung der Lage ausdrückt, durch diese aber, woraus das Verneinende hervorgeht, die trigonometrische Funktion ihrer Größe nach nicht im geringsten geändert wird — (§. 11. Zus. 1. §. 18. Zus. 2.).

Dieser so für die Sinus... Zahlen gefundenen und in Tafeln zum bequemen Gebrauche gebrachten Logarithmen bedient man sich durchgängig bey der Auflösuug trigonometrischer Aufgaben statt der natürlichen Linien. Daß man indessen auch diese zuweilen vortheilhaft brauchen könne, z. B. bey Ausmessung oder Auftragung der Winkel ohne Transporteur zeigt H. Lorenz im Anhange zu seinem ersten Kursus der gesammt. Math. S. 91. 92. an einigen Aufgaben.

Zusatz 1. Zu den gewöhnlichsten und vorzüglichsten gemeinen Logarithmentafeln gehören nebst den Callet'schen die von Vega — durch einen unglücklichen Todesfall der Pflege der Mathematik,

leider! immer noch zu früh entrissen!*) — welche wegen der angehängten kleinen Tafeln der Proportionaltheile da, wo nicht gerade die größte Genauigkeit gefodert wird, von großer Brauchbarkeit sind.

Mit diesen Proportionaltheilen hat es folgende Bewandniß:

Es sey z. B. der Log. 2,3056417 gegeben: so finde ich auf der Stelle die 5 ersten dazu gehörigen Ziffern, nämlich 203,13; der Log. dieser Zahl ist aber 2,3056308. Denke ich mir nun jene Zahl um eine ganze Einheit wachsen, nämlich 202,14: so erhalte ich den nächst größeren Log. 2,3056523; beyder Logarithmen Unterschied ist daher 215; d. i. wächst jene Zahl um 1, so wächst der Log. um $\frac{215}{10 \text{ Mill.}}$; folglich beym Wachsen um $\frac{1}{10}$, nur um $\frac{21,5}{10 \text{ Mill.}}$ beym Wachsen um $\frac{2}{10}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{4}{10}$... um 43,0; 64,5; 86,0.... Hieraus ergiebt sich die Tabelle:

*) Am 27ten Sept. 1802 fand man seine Leiche am Ufer der Donau, wo er auch sonst zu baden pflegte. Er war vor 48 Jahren zu Sagovitz in der Moraitscher Pfarre im Herzogthume Krain von armen slavischen Eltern geboren.

Zunahme der Zahl um 1 Zehnth.	Zunahme des Logar. um 21,5
2 —	— — 43,0
3 —	— — 64,5
4 —	— — 86,0
5 —	— — 107,5
6 —	— — 129,0
7 —	— — 150,5
8 —	— — 172,0
9 —	— — 193,5

Diese Proportionaltheile hat nun, wie hier, Vega seiner Logarithmentafel beygefügt, wobey er jedoch immer die letzte Ziffer wegließ, und dafür, wenn die weggelassene $= 5$ oder > 5 war, die nächstvorhergehende um 1 vermehrte. So sind jene correspondirenden Zunahmen 22; 43; 65 u. s. f.

Nun ist der Unterschied zwischen dem log. von 202,13 und dem gegebenen 109; das Augment folglich der Zahl 202,13, welches dem Unterschiede entspricht, ist nach der Tafel der Proportionaltheile $>$ als $\frac{5}{10}$ und $< \frac{6}{10}$; weil 109 aber jenem näher kömmt, so wird die Ziffer 5 als die 6te unserer Zahl angesehen; man hat also 202, 135.

Auf ähnliche Art geht man im umgekehrten Falle zu Werke.

Zweytens. Ein ähnliches Verfahren tritt ein, um den einem gegebenen Logar. entsprechenden Winkel nicht nur in Graden und Minuten, sondern auch in Sekunden, und umgekehrt zu bestimmen. Man setzt nämlich hier auf eine ähnliche Weise, wie vorher geschehen, voraus, daß sich die Unterschiede der Winkel (in Sekunden) ver-

hal-

halten wie die Unterschiede der zugehörigen trigonometrischen Linien und Logarithmen, und umgekehrt. Dieser Voraussetzung gemäß hat Vega Differenzentafeln beygefügt, vermittels welcher jener Zweck erreicht werden kann. Zugleich hat er, weil jene Voraussetzung bey sehr kleinen sowohl als bey 90° nahen Winkeln merklicher unrichtig ist, als in Ansehung solcher Winkel, die über 60° und unter 84° sind, wo in der letzten Ziffer nur um einige Einheiten gefehlt werden kann, eine eigene Einrichtung getroffen; welche in seiner Vorrede zur Herausgabe nachzusehen ist.

Es erhellt übrigens aus dem oben vorgetragenen Wachsen und Abnehmen der trigonometrischen Funktionen im Verhältniße mit den Winkeln, daß jene in den Vegaischen Tabellen enthaltene Differenz, mit der Anzahl der fraglichen Minuten multiplizirt, bald addirt, bald subtrahirt werden müsse. Es sey z. B. zu suchen log. sin. $10° 36' 25''$ und log. cos. $10° 36' 25''$; so ist des nächst kleineren Winkels log. sin. $10° 36' 0'' = 9{,}2647030$

$$\text{Diff.}^{I\,II}_{I\,II} \; 25 = 112{,}43 \times 25 = + 2811$$

also log. sin. $10° 16' 25'' = 9{,}2649841$

Des nächst kleineren Winkels log. cos. $10° 36' 0'' = 9{,}9925250$

$$\text{Diff.}^{I\,II}_{I\,II} \; 25 = 3{,}94 \times 25 = - 98$$

also log. cos. $10° 36' 25'' = 9{,}9925152$

Eben so mit Tangenten und Cotangenten.

Zusatz 2. Da die Logarithmen der Sekanten und Cosekanten nicht in den gemeinen trigon. Tafeln stehen: so will ich hier nur kurz die Art, sie, im Falle es nöthig ist, zu finden, angeben.

Nach §. 15. 3, 4 ist $\sec. \alpha = \frac{r^2}{\cos. \alpha}$, also

$\log. \sec. \alpha = 2 \log. r - \log. \cos. \alpha = 20 - \log. \cos. \alpha$;

und $\operatorname{cosec}. \alpha = \frac{r^2}{\sin. \alpha}$, also $\log. \operatorname{cosec}. \alpha = 2 \log. r - \log. \sin. \alpha = 20 - \log. \sin. \alpha$.

Beysp. Man soll zur Sec. $56° 7' 31'', 45$ den Logar. suchen. Diesen erhält man durch folgende Rechnung:

20,0000000

$-9,7462477 = -$ log. cos. $56° 7' 0''$

10,2537523

$+986$ die Proportionalth. wegen $31'', 45$.

10,2538509 = dem gesuchten log. Sec.

Eben so wird der log. cosec. desselben Winkels gesucht:

20,0000000

$-9,9191694 = -$ log. sin. $56° 7' 0''$

10,0808306

-445 = den Prop. Th. wegen $31'', 45$

10,0807861 = dem gesuchten log. cosec.

Zu-

Zusatz 3. Bey trigonometrischen Berechnungen mittels der Logarithmen bedient man sich mit vielem Vortheile der arithmetischen Ergänzung (complementi arithm.), wodurch man überhaupt die Subtraktion in Addition verwandelt. Jene besteht in dem Reste, den man erhält, wenn man die abzuziehende Zahl von 1 vom nächst höherem Werthe (oder von der nächst höheren Ordnung), als ihre Ziffer vom höchsten Werthe — hat, abzieht. Blos des Beyspiels wegen soll 22 von 44 abgezogen werden. Da die Ziffer 2 vom höchsten Werthe ein Zehner ist, so ist 100 — 22 = 78 die arithmetische Ergänzung. Hieraus ist zugleich ersichtlich, daß, wenn ich statt 22 zu subtrahiren, die arithm Erg. 78 zu 44 addire, zwar 22 wirklich subtrahirt wird, aber die Summe um eben jene Ziffer vom nächst höheren Werthe zu groß werden muß, indem 78 = 100 — 22; daß ich folglich, um den wahren Rest zu haben, immer die letzte Ziffer zur Linken aus der erhaltenen Summe wegschneiden müsse. So giebt 44 + 78 = 122, um 100 zu groß; folglich muß die vorderste Ziffer weggeschnitten werden, und so in allen Fällen.

Da jenes Abziehen, um die arithm. Ergänzung zu haben, bloß in Gedanken geschehen kann: so erhellt ihr Nutzen für alle jene Fälle, wo von mehreren großen Zahlen eine oder mehrere andere sollen abgezogen werden. Es ist z. B. $a : b = c : \frac{bc}{a}$

$\frac{bc}{a}$, folglich (log. b + log. c) — log. a = log. $\frac{bc}{a}$.

Man suche nun aus den Tafeln den Log. a, nehme, ohne ihn selbst auszuschreiben, das arithm. Complement, addire dasselbe mit den 2 Logarithmen zu einer Summe, schneide dann die vorderste Ziffer weg: so hat man den Log. der 4ten Proportionalgröße.

Was ich hier arithm. Ergänzung nenne, kann man auch mit Andern Dekadische Erg. nennen; worunter man kurz die Zahl versteht, um welche eine andere < 10 ist. Bey zu subtrahirenden Logarithmen angewendet, gilt dann die Regel, daß man von der Kennziffer der Summe so oft 10 abzieht, als dekadische Ergänzungen gebraucht wurden; was dasselbe Resultat, nach der vorigen Regel, giebt.

So viel war nöthig, hier von der arithm. Ergänzung zu sagen, um mich in der Folge darauf berufen zu können.

Zusatz 4. Es ist hier noch wegen der Leichtigkeit im Calcul die Methode zu bemerken, jeden negativen Logarithmus in einen positiven umzuwandeln.

Bey einfachen Zahlengrößen erhebe man nämlich die Charakteristik des Logarithmus um 10. So ist z. B. log 0, 25 = log. $\frac{25}{100}$ = 1,3979... — 2,00... = 11,3979.. — 2 = 9,3979.. Diesem Log. entspricht eigentlich die Zahl 2500000000; da

es

es nun unmöglich ist, sich in der Rechnung um 2500 Millionen, wie hier geschehen müßte, zu irren: so merkt man sogleich, daß hier eine Umwandlung vor sich gegangen sey. Eben so: log. 0,025 = log. $\frac{25}{1000}$ = 1,397... — 3,00.. = = 11,397... — 3 = 8,397... u. s. w. so daß die allgemeine Regel für die Erhöhung der Charakteristik ist: Man setze zu dieser so viele Einheiten, als der Ueberschuß der Zahl 9 und der Anzahl der nach dem Punkte oder Striche gesetzten Nullen beträgt. Sollte man demnach zu einem so erhaltenen Logarithmus z. B. zu 9,397.. die Zahl suchen: so setze man 0, und nach 0, so viel Nullen als der Unterschied zwischen 9 und der Anzahl der Einheiten der Charakteristik anzeigt. So wäre die dem log. 7,397... entsprechende Zahl 0,0025.

Daraus fließt eine 2te Regel; daß man nämlich bey Additionen solcher umgewandelten Logarithmen wieder 10 gehörig weglässt, um die entsprechende Zahl zu finden: z. B. 20X0,25, daher

log. 20 = 1,3010300
log. 0.25 = 9,3979400

Summe 10,6989700

Nach Weglassung der 10 hat man 0,6989...; welchem entspricht die Zahl 0, 5.

Eben so log. 0,2 = 9,3010300
✝ log. 0,25= 9,3979400

Summe 18,6989700

Nach

Nach Weglassung der 10 hat man 8,698... folglich nach dem vorigen die entsprechende Zahl 0,05 = 0,2X0,25.

Auf dieselbe Art verfährt man bey Erhebung zu Potenzen: z. B. $(0,3)^2$ = 2 log. 0,3 = 9,47712l3X2 = 18,9542426, wo man nur der vorigen Regel gemäß schreibt 8,95.., daher $(0,3)^2$ = 0,09.

Und $(0,5)^3$ = 3. log. 0,5 = 9,6989700X3 = 29,0969100, wo man wieder 9,096.. schreibt, daher $(0,5)^3$ = 0,125; die Regel ist: man läßt nur 10 in Ansehung der zweyten Potenz, 2. 10 aber in Ansehung der dritten Potenz u. s. w. aus der Charakteristik des Logarithmus weg.

Hieraus folgt die Regel für die Wurzelausziehung; daß man nämlich diese wegelassene 10 wieder hinzuthun müsse, um die wahre Wurzel zu haben. Z. B. $\sqrt{0,09}$ = 8,9542426 : 2 = 18,954..: 2 = 9,47712l3 = 0,477... Also $\sqrt{0,09}$ = 0,3.

Oder $\sqrt[3]{0,125}$ = 29,0969100 : 3 = 9,6989700 = 0,5.

Die allgemeine Regel für andere Fälle erhellt hieraus von selbst.

§. 33.

Da die trigonometrischen Tafeln für verschiedene Halbmesser berechnet wurden (§. 31. Schol.): so ist es nöthig, zu wissen, wie man den Ausdruck einer trigonom. Funktion in einem Systeme auf den gleichen nach einem andern zurücke führen könne.

Es

Es ist z. B.

sin. 1′ =2908882068 65; sin. 18° =30901699 43 74947

nach Trig. Brit.

=2908882 ———— =3090169944 nach Brigg.

=2909 ———— =3090170 nach kleineren Tafeln.

Man hat nun dasjenige System, welches alle trigonometrischen Linien für den Halbmesser 1 darstellt, das natürliche System, in welchem folglich alle Sinusse 10theilige Brüche sind, genannt. Dieses System findet sich in Schulzens und Vega's Tafeln *) Alle übrigen Systeme befaßt man unter dem Namen künstliches System. Daher auch die Bezeichnungen: sin. nat. α; tang. nat. α u. s. w. oder sin. art. α; tang. art. α... Für erstere Bezeichnung setzen wir blos sin. α u. s. w. für letztere sin. tab. α.... Den Sinus totus aber oder Modulus jedes künstlichen Systems bezeichnen wir mit r.

Man kann nun die Aufgabe, um ein System auf das andere zurückzuführen, nach Karsten **) so stellen:

Aufg. Es ist eine Gleichung zwischen zweyen oder mehreren trigonometrischen Linien

---

*) Georg Vega's logar. trigon. Tafeln I. Band S. 332... Leipzig in der Weidm. Buchh. 1797.

**) S. cit. Buch. S. 414. 2te Aufl.

Linien des natürlichen Systems gegeben: man soll finden, wie die gleichnamigen trig. Linien in einem andern System von einander abhängen.

Aufl. 1. Es ist nach §. 20.

$$i : r = \text{sin.}\alpha : \text{sin. tab.}\alpha;$$

eben so $1 : r = \text{tang.}\alpha : \text{tang. tab.}\alpha$.

Es ist also $\frac{\text{sin. tab.}\alpha}{r} = \text{sin.}\alpha$, und $\frac{\text{tang. tab.}\alpha}{r} = \text{tang.}\alpha$; d. h. Jede trigonometrische Linie eines künstlichen Systems mit dem dazu gehörigen Halbmesser dividirt, giebt die gleichnamige trigonom. Linie des natürlichen Systems.

2. Man kann also in jeder Gleichung zwischen zweyen oder mehreren trigonom. Linien anstatt einer jeden die gleichnamige künstliche trig. Linie setzen, wenn man nur unter dieser zugleich den Halbmesser r als Divisor setzt. Kommt also eine Potenz einer solchen natürlichen trigon. Linie vor: so muß auch r zu derselben Potenz erhoben, als Divisor unter der gleichn. trigon. Linie gesetzt werden. Denn es ist

$$\text{sin.}\alpha^n = \frac{(\text{sin. tab.}\alpha)^n}{r^n}; \quad \text{tang.}\alpha^n = \frac{(\text{tang. tab.}\alpha)^n}{r^n}$$

u. s. w.

Zusatz 1. Weil $\text{tang.}\alpha = \frac{\text{sin.}\alpha}{\text{cos.}\alpha}$ (§. 15.): so wird auch $\frac{\text{tang. tab.}\alpha}{r} = \frac{\text{sin. tab.}\alpha}{\text{cos. tab.}\alpha}$; folglich tang.

tab α.

$$\text{tab. } \alpha = \frac{\text{r sin. tab. } \alpha}{\text{cos. tab. } \alpha}$$, und mittels der Logarithmen:

log. tang. tab. α = log. r + log. sin. tab. α — log. cos. tab. α.

Eben so ist $\text{cot. tab } \alpha = \frac{\text{r. cos. tab. } \alpha}{\text{sin. tab. } \alpha}$ (§. 15.), also log. cot. tab. α = log. r + log. cos. tab. α — log. sin. tab. α

Zusatz 2. Es ist ferner $\text{sec. } \alpha = \frac{1}{\text{cos. } \alpha}$ (§. 15.); $\frac{\text{sec. tab. } \alpha}{\text{r}}$ also $= \frac{\text{r}}{\text{cos. tab. } \alpha}$; folglich sec. tab. α

$$= \frac{r^2}{\text{cos. tab. } \alpha};$$

daher log. sec. tab. α = 2 log. r — log. cos. tab. α.

Eben so ist $\text{cosec. tab. } \alpha = \frac{r^2}{\text{sin. tab. } \alpha}$, daher log. cosec. tab. α = 2 log. r — log. sin. tab. α.

Schol. Wie man dasjenige System, in welchem man alle trigonometrischen Linien für den Halbmesser = 1 berechnet, findet, das natürliche, und jede darin vorkommende trigon Funktion die natürliche, jedes andre aber, für einen andren Sinus totus oder Modulus berechnete System das künstliche u. s. w. nennt: so hat man auch das

Briggische oder gemeine Logarithmensystem das künstliche und seine Logarithmen künstliche genannt, zum Unterschiede vom natürlichen oder hyperbolischen Logarithmensystem, dessen Modulus (Subtangente) = 1 ist. Dieses System ist am leichtesten durch den Integralcalcul darstellbar. Man findet es indessen von verschiedenen Mathematikern bey der Logarithmenlehre abgehandelt, z. B. in H. Prof. Stahls Anfangsgründen der Zahlenarithm. und Buchstabenrechnung S. 237. Aber vorzüglich empfehle ich dem, welcher sich auf eine gründliche und leichte Art zugleich über die Logarithmen Theorie unterrichtet wünscht, die erste Abhandlung in der kürzlich erschienenen Schrift: „Sehr leichte und kurze Entwickelung einiger der wichtigsten mathem. Theorien" von H. Prof. Schulz. Ich halte es für nützlich von diesem Systeme hier nur Einiges zu erwähnen.

Nimmt man, wie man es auch einleuchtend finden könnte, als erwiesen an, daß sich die Logarithmen derselben Zahl = x nach beyden genannten Systemen verhalten, wie die Moduln der letztern; oder wenn β der Mod. des Brigg. Syst. ist, daß log. nat. x : log. Brigg. x = 1 : β sey; so hat man $\log.\text{nat. } x = \frac{\log.\text{Brigg. } x}{\beta}$ und log. Br. x $= \beta$. log. nat. x; d. h. man kann aus einem ge-

gebe-

gebenen natürlichen Logar. den Briggischen, und umgekehrt, finden.

Wollte man ferner den Modulus z. B. des Briggischen Systems finden: so erhielte man diesen nun leicht Die Grundzahl dieses Systems ist 10, und log. Brigg. $10 = 1$; folglich ist nach dem vorigen $1 = \beta \log.\ nat.\ 10$, also $\beta = \frac{1}{\log.\ nat.\ 10}$.

Oder im Allgemeinen. Wenn b die Grundzahl irgend eines künstlichen logar. Systems, β desselben Modulus ist: so hat man diesen $= \frac{1}{\log.\ nat.\ b}$. In dem Werke: Neue und erweiterte Sammlung Logarithmischer, Trigonometrischer und anderer zum Gebrauch der Mathem. unentbehrlicher Tafeln von J. Carl Schulz. 2 Bände. Berlin 1778. sind auch die von Wolfram einem holländischen Artillerielieutenant meistens bis zu 48 Decimalstellen berechneten natürlichen Logarithmen für die Primzahlen bis 10000 enthalten. Man findet da log. nat. $10 = 2{,}302585\ldots$, also der Modulus des Log. Brigg. Syst. $= 0{,}43429\ldots$ Damit folglich den natürlichen Log. irgend einer Zahl multiplizirt, erhielte man den Briggischen derselben Zahl. Und auf ähnliche Art im Allgemeinen; so, daß man mittels des natürl. log. Systems irgend ein anderes künstliche leicht berechnen könnte.

Tafel

der brauchbarsten trigonometrischen Formeln für den Halbmesser 1.

A. Einfache, theils ursprüngliche, theils abgeleitete Formeln für ganze trigon. Funktionen.

§. 34.

Für den Sinus.

Fig. 3. Im Δ CJD ist $JD = \sqrt{(JC^2 - CD^2)}$, also

1. $\sin.\alpha = \sqrt{(1 - \cos.\alpha^2)} = \sqrt{[(1 + \cos.\alpha)(1 - \cos.\alpha)]}$.

Wegen der ähnlichen $\Delta\Delta$ DJC und ATC ist

$$JD : DC = AT : AC$$

d. i. $\sin.\alpha : \cos\alpha = \tang\alpha : 1$; also

2. $\sin.\alpha = \cos.\alpha \cdot \tang.\alpha$. — Eben so ist

$$JD : CJ = AT : CT$$

d. i. $\sin.\alpha : 1 = \tang.\alpha : \sec.\alpha$; also

3. $\sin.\alpha = \frac{\tang.\alpha}{\sec.\alpha}$. — Wenn man statt CT setzt

$\sqrt{(AC^2 + AF^2)}$,

so ist

4. $\sin.\alpha = \frac{\tang.\alpha}{\sqrt{(1 + \tang.\alpha^2)}}$; substituirt man aber

$AT = \sqrt{(CT^2 - AC^2)}$; so ist

5. sin.

5. $\sin.\alpha = \frac{\sqrt{(\sec.\alpha^2 - 1)}}{\sec.\alpha}$. — Nimmt man die 2 ähnl. $\triangle\triangle$ CJD, BFC; so ist JD : JC = BC : CF also

6. $\sin.\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}.\alpha}$. — Setzt man statt CF $\sqrt{(BF^2 + AC^2)}$ so ist

7. $\sin.\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cot.\alpha^2)}}$

Zieht man die Linien AJ und JH; so ist JD : AD = DH : JD, weil ferner DH = 2r — AD, ist

8. $\sin.\alpha = \sqrt{(\text{sin. verf.}\,\alpha \,.\, (2 - \text{sin. verf.}\,\alpha))}$.

(113) $\sin.\alpha = \frac{2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha}{1 + \text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha^2}$.

§. 35.

Für den Cosinus.

9. $\cos.\alpha = \sqrt{(1 - \sin.\alpha^2)} = \sqrt{[(1 + \sin\alpha).(1 - \sin.\alpha)]}$. Nrõ 1.

10. $\cos.\alpha = \frac{\sin.\alpha}{\text{tang.}\,\alpha}$ n. 2. — Weil CD : AC = CJ : CT : so ist

11. $\cos.\alpha = \frac{1}{\sec.\alpha}$, und für CT, wie n. 3. substituirt,

12. $\text{cos.}\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1+\text{tang.}\alpha^2)}}$. — Da CJD ∽ BCF:

so ist

$$CD : CJ = BF : CF ; \text{ also}$$

13. $\text{cos.}\alpha = \frac{\text{cot.}\alpha}{\text{cosec.}\alpha}$; — für $BF = \sqrt{(CF^2 - BC^2)}$ substituirt, ist

14. $\text{cos}\alpha = \frac{\sqrt{(\text{cosec.}\alpha^2 - 1)}}{\text{cosec.}\alpha}$. — $CD = AC$ — AD, also

15. $\text{cos.}\alpha = 1 - \text{sin. v.}\alpha$.

(120) $\text{cos.}\alpha = \frac{1 - \text{tang.}\frac{1}{2}\alpha^2}{1 + \text{tang.}\frac{1}{2}\alpha^2}$.

§. 36.

Für die Tangente.

16. $\text{tang.}\alpha = \frac{\text{sin.}\alpha}{\text{cos.}\alpha}$ (§. 15. 1.) $= \frac{\text{sin.}\alpha}{\sqrt{(1-\text{sin.}\alpha^2)}}$. n. 9.

$= \frac{\sqrt{(1-\text{cos.}\alpha^2)}}{\text{cos.}\alpha}$. n. 1.

Weil $AT = \sqrt{(CT^2 - AC^2)}$, ist auch

17. $\text{tang.}\alpha = \sqrt{(\text{sec.}\alpha^2 - 1)}$. — Da $\triangle$ ATC ∽ $\triangle$ FBC, folglich

$AT : AC = BC : BF$, und für BF wie n. 13. substituirt, ist

18.

18. $\text{tang.}\,\alpha = \frac{1}{\cot.\,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{(\text{cosec.}\,\alpha^2 - 1)}}$. — Aus nn. 16, 8, 15 folgt

19. $\text{tang.}\,\alpha = \frac{\sqrt{(\text{sin. v.}\,\alpha \,.\, (2 - \text{sin. v.}\,\alpha)]}}{1 - \text{sin. v.}\,\alpha}$.

§. 37.

Für die Cotangente.

20. $\text{Cot.}\,\alpha = \frac{1}{\text{tang.}\,\alpha}$ (§. 15. 2.) und

21. $\text{cot.}\,\alpha = \frac{\text{cos.}\,\alpha}{\text{sin.}\,\alpha} = \frac{\sqrt{(1 - \text{sin.}\,\alpha^2)}}{\text{sin.}\,\alpha}$, n. 9.

$= \frac{\text{cos.}\,\alpha}{\sqrt{(1 - \text{cos}\,\alpha^2)}}$, n. 1.

Es erhellt für sich, daß auch

22. $\text{cot.}\,\alpha = \sqrt{(\text{cosec.}\,\alpha^2 - 1)}$. — In n. 20. für tang. α n. 17. substituirt, ist

23. $\text{cot.}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{(\text{sec.}\,\alpha^2 - 1.)}}$. — In n. 21. nn. 8; 12 subst. ist endlich

24. $\text{cot.}\,\alpha = \frac{1 - \text{sin. v.}\,\alpha}{\sqrt{[(\text{sin. v.}\,\alpha) \,.\, (2 - \text{sin. v.}\,\alpha)]}}$. Durch

Folgerung

25. $\text{tang.}\,\alpha \,.\, \text{cot.}\,\alpha = 1$.

Anmerk. Man sieht aus diesen angeführten Formeln nun ein, wie sehr der Ausdruck für eine

und dieselbe trigon. Funktion theils aus der Ansicht der Figur, theils durch Substitution varirt werden könne. Ich werde mich daher bey den Folgenden kürzer fassen.

§. 38.

Für die Sekante.

26. $\text{sec.}\,\alpha = \frac{1}{\text{col.}\,\alpha}$ (§. 15. 3.) $= \frac{1}{\sqrt{(1 - \text{sin.}\,\alpha^2)}}$ n. 9. — Und aus dem rechtwinklichten Dreyecke ACT

27. $\text{sec.}\,\alpha = \sqrt{(1 + \text{tang}\,\alpha^2)}$. — In den ähnlichen Dreyecken ACT, FCB ist CT : AC $=$ CF : BF, und für CF, wie in n. 6. substituirt, ist

28. $\text{sec.}\,\alpha = \frac{\sqrt{(1 + \text{cot.}\,\alpha^2)}}{\text{cot.}\,\alpha}$.

Für die Cosekante.

29. $\text{Cosec.}\,\alpha = \frac{1}{\text{sin.}\,\alpha}$ (§. 15. 4.) $= \frac{1}{\sqrt{(1 - \text{col.}\,\alpha^2)}}$. n. 1.

30. $\text{cosec.}\,\alpha = \sqrt{(1 + \text{cot.}\,\alpha^2)}$, aus der Fig. — Aus den ähnlichen Dreyecken ATC, CFB ist CF : CT $=$ BC : AT folglich für CT, wie in n. 3. substituirt, ist

31. $\text{cosec.}\,\alpha = \frac{\sqrt{(1+\text{tang.}\,\alpha^2)}}{\text{tang.}\,\alpha} = \frac{\text{sec.}\,\alpha}{\sqrt{(\text{sec.}\,\alpha^2-1)}}$.

n. 17.

§. 39.

Für den Sinus versus.

$AD = AC - CD$; also

32. $\text{sin. v.}\,\alpha = 1 - \text{cos.}\,\alpha = 1 - \sqrt{(1-\text{sin.}\,\alpha^2)}$.

n. 9. etc. für den stumpfen Winkel ist

33. $\text{sin. v.}\,(180°-\alpha) = 1 + \text{cos.}\,\alpha$ (§. 13.).

Für der Quercosinus.

34. $\text{cos. v.}\,\alpha = 1 - \text{sin.}\,\alpha$ (§. 13.) $= 1 - \sqrt{(1-\text{cos.}\,\alpha^2)}$.. etc.

B. Formeln für die Hälften trigonometrischer Funktionen.

§. 40.

Für den Sinus eines halben Bogens oder Winkels.

Man ziehe die senkrechte Linie CO; so ist nun, weil $AJH = R = COH$, $CH : AH = CO : AJ$; es ist aber $CH : AH = 1 : 2$; folglich $CO : AJ = 1 : 2$, also $CO = \frac{1}{2} AJ = \frac{1}{2}\sqrt{(DJ^2 + AD^2)}$, daher

35. $\text{sin.}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{[\text{sin.}\,\alpha^2 + (1-\sqrt{[1-\text{sin}\,\alpha^2]})^2]}$.

n. 32. und elevirt.

$= \frac{1}{2}\sqrt{[\text{sin.}\,\alpha^2 + (1-2\sqrt{(1-\text{sin.}\,\alpha^2)} + (1-\text{sin.}\,\alpha^2)]}$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(2 - 2\sqrt{(1 - \text{sin.}\,\alpha^2)})}$$

$$= \sqrt{(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - \text{sin.}\,\alpha^2)})}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1 - \sqrt{(1 - \text{sin.}\,\alpha^2)}}{2}\right]}\text{; folglich}$$

36. $\text{sin.}\,\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left[\frac{1 - \text{cos.}\,\alpha}{2}\right]}$ n. 9. $= \sqrt{\left[\frac{\text{sin. v.}\,\alpha}{2}\right]}$. etc.

Zusatz. Also ist auch

37. $\text{sin.}\,\alpha = \sqrt{\frac{1 - \text{cos.}\,2\alpha}{2}}$, und

38. $\text{sin.}\,\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1 - \text{cos.}\,\alpha}{2}$, folglich

39. $2.\ \text{sin.}\,\frac{1}{2}\alpha^2 = 1 - \text{cos.}\,\alpha = \text{sin. v.}\,\alpha$ n. 32,

statt dessen man sich stets in der Trigonometrie der zwey ersten Formeln bedient.

40. $\text{cos.}\,\alpha = 1 - 2\ \text{sin.}\,\frac{1}{2}\alpha^2$

§. 41.

Für den Cosinus des halben Bogens.

$HO = \text{cos.}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}JH = \frac{1}{2}\sqrt{(JD^2 + (DC + CH)^2)}$; also

41. $\text{cos.}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(\text{sin.}\,\alpha^2 + (\text{cos.}\,\alpha + 1)^2)}$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{(\text{sin.}\,\alpha^2 + (1 + \sqrt{[1 - \text{sin.}\,\alpha^2]})^2)}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{1 + \sqrt{[1 - \text{sin.}\,\alpha^2]}}{2}\right]}\text{; folglich}$$

42. $\text{cof. } \frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left[\frac{1 + \text{cof. } \alpha}{2}\right]}$. etc.

Zuſatz 1. Es iſt alſo

43. $\text{cof. } \alpha = \sqrt{\frac{1 + \text{cof. } 2\alpha}{2}}$, und

44. $\text{cof. } \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{1 + \text{cof. } \alpha}{2}$, oder

45. $2\,\text{cof. } \frac{1}{2}\alpha^2 = 1 + \text{cof. } \alpha$.

Zuſatz 2. Setzt man ſtatt $\frac{1}{2}\alpha$ $\frac{90° - \alpha}{2}$; ſo geht die Formel n. 36, weil cof. $(90° - \alpha) = \text{ſin. } \alpha$, über in

46. $\text{ſin. } (45° - \frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\left[\frac{1 - \text{ſin. } \alpha}{2}\right]}$; und aus nro. 42 wird

47. $\text{cof. } (45° - \frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\left[\frac{1 + \text{ſin. } \alpha}{2}\right]}$.

§. 42.

Für die Tangente des halben Bogens.

In den ähnl. $\triangle\triangle$ HDJ, HCS iſt CS : HC = JD : HD; CS aber = $\text{tang. } \frac{1}{2}\alpha$, und HD = HC + CD = $1 + \text{cof. } \alpha$; alſo

48. $\text{tang. } \frac{1}{2}\alpha = \frac{\text{ſin. } \alpha}{1 + \text{cof. } \alpha} = \frac{\sqrt{(1 - \text{cof. } \alpha^2)}}{1 + \sqrt{(1 - \text{ſin. } \alpha^2)}}$ nn. 1. 9.

Weil

Weil $\frac{\sqrt{(1 - \text{col.}\,\alpha^2)}}{1 + \text{col.}\,\alpha}$

$= \frac{\sqrt{[(1+\text{col.}\,\alpha).(1-\text{col.}\,\alpha)]}}{1 + \text{col.}\,\alpha}$

$= \frac{\sqrt{(1+\text{col.}\,\alpha).\sqrt{(1-\text{col.}\,\alpha)}}}{\sqrt{(1+\text{col.}\,\alpha).\sqrt{(1+\text{col.}\,\alpha)}}}$; so ist

49. $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left[\frac{1 - \text{col.}\,\alpha}{1 + \text{col.}\,\alpha}\right]}$.

§. 43.

Für die Cotangente des halben Winkels.

Da jede Cotangente $= \frac{1}{\text{tang.}\,\alpha}$ n. 20. so ist

$\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha = 1 : \frac{\text{sin.}\,\alpha}{1 + \sqrt{(1 - \text{sin.}\,\alpha^2)}}$ n. 48. also

50. $\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{1 + \sqrt{(1 - \text{sin.}\,\alpha^2)}}{\text{sin.}\,\alpha}$, folglich

51. $\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{1 + \text{col.}\,\alpha}{\sqrt{(1 - \text{col.}\,\alpha^2)}}$ nn. 1. 9.

$= \sqrt{\left[\frac{1 + \text{col.}\,\alpha}{1 - \text{col.}\,\alpha}\right]}$. etc.

§. 45.

§. 44.

Für die Sekante des halben Winkels.

52. $\text{Sec.}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left[\frac{2}{1 \pm \sqrt{(1 - \text{sin.}\alpha^2)}}\right]}$ nn. 26, 41.

wie auch

53. $\text{sec.}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left[\frac{2}{1 \pm \text{cos.}\alpha}\right]}$ etc.

§. 45.

Für die Cosekante des halben Winkels.

54. $\text{cosec.}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left[\frac{2}{1 - \sqrt{(1 - \text{sin.}\alpha^2)}}\right]}$ nn. 29. 35.

55. $\text{cosec.}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left[\frac{2}{1 - \text{cos.}\alpha}\right]}$. n. 9.

§. 46.

Für den Quersinus des halben Winkels.

56. $\text{Sin. v.}\frac{1}{2}\alpha = 1 - \sqrt{\left[\frac{1 \pm \sqrt{(1 - \text{sin.}\alpha^2)}}{2}\right]}$

nn. 32. 41.

$= 1 - \sqrt{\left[\frac{1 \pm \text{cos.}\alpha}{2}\right]}$ n. 42.

C. Formeln für die Summe und Differenz trigonometrischer Funktionen.

§. 47.

Durch die Auflösung der Aufgaben §§. 27 28. sind wir auf folgende 4 prägnante Formeln gestoßen: nämlich aus §. 27.

57. $\text{Sin.}(\alpha \mp \beta) = \text{sin.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta \mp \text{cos.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta.$

58. $\text{sin.}(\alpha - \beta) = \text{sin.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta - \text{cos.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta.$

Also:

59. $\text{sin.}(\alpha \overline{\mp} \beta) = \text{sin.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta \overline{\mp} \text{cos.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta.$

und

60. $\text{sin.}(\alpha \mp \beta) \mp \text{sin.}(\alpha - \beta) = 2\,\text{sin.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta.$

Aus §. 28.

61. $\text{cos.}(\alpha - \beta) = \text{cos.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta \mp \text{sin.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta.$

62. $\text{cos.}(\alpha \mp \beta) = \text{cos}\,\alpha \,.\, \text{cos.}\beta - \text{sin.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta.$

Also:

63. $\text{cos.}(\alpha \overline{\mp} \beta) = \text{cos.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta \underline{\mp} \text{sin.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta.$

und

64. $\text{cos.}(\alpha - \beta) - \text{cos.}(\alpha \mp \beta) = 2\,\text{sin.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta.$

Schol. Diese Formeln zeigen die, wahrscheinlich von Tycho oder Wittich *) erfundene, Prostaphäresis, wodurch die Multiplication und Division

*) Matsko giebt in der Abh. Prostaphæresis inventori suo Rothmanno vindicatur. 1781, den letzt Genannten, welcher mit jenen Beyden eng verbunden war, als Erfinder an.

vision in Addition und Subtraction verwandelt wird. So ist z. B. nach 64. $\sin.\alpha.\sin.\beta = \frac{1}{2}[\cos.(\alpha - \beta) - \cos.(\alpha + \beta)]$. Hier verwandelt sich nun die Multiplication vielziffriger Zahlen in Subtr. und Halbirung. Daß eine solche Regel vor der Erfindung der Logarithmen vom größten Nutzen war, leuchtet von selbst ein. Daher schrieben auch von ihr Ursus in fundamento Astronomiæ, Clavius in Astrolabio, und Logomontan. in Astronomia Danica.

§. 49.

Durch Substitution nun lassen sich jene Fundamentalformeln I. für den Sinus der Summe oder Differenz zweyer Winkel in folgende gleiche Ausdrücke bringen, welche dieselbe trigonometrischen Linien enthalten; wobey ich mich auf Sinus und Cosinus beschränke.

Nämlich:

65. $\sin.(\alpha \overline{+} \beta) = \sin\alpha.\sqrt{(1-\sin.\beta^2)} \overline{+} \sin.\beta.\sqrt{(1-\sin.\alpha^2)}$. n. 9.

66. $\sin.(\alpha \overline{+} \beta) = \cos.\beta.\sqrt{(1-\cos\alpha^2)} \overline{+} \cos.\alpha.\sqrt{(1-\cos.\beta^2)}$. n. 1.

II. Für den Cosinus der Summe oder Differenz 2 Winkel

67. $\cos.(\alpha \overline{+} \beta) = \sqrt{(1-\sin.\alpha^2)}.\sqrt{(1-\sin.\beta^2)} \underline{+} \sin.\alpha.\sin.\beta$.

68. $\cos.(\alpha \overline{+} \beta) = \cos.\alpha.\cos.\beta \underline{+} \sqrt{(1-\cos.\alpha^2)}.\sqrt{(1-\cos.\beta^2)}$.

§. 49.

Für die Tangente der Summe oder Differenz 2 Winkel.

69. $\text{tang.}\ (\alpha \mp \beta) = \dfrac{\text{sin.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta \mp \text{cos.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta}{\text{cos.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta \pm \text{sin.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta}$

n. 16. §. 47.

dividirt man sowohl den Zähler als Nenner dieses Bruches mit $\text{cos.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta$: so hat man

70. $\text{tang.}\ (\alpha \mp \beta) = \dfrac{\dfrac{\text{sin.}\alpha}{\text{cos.}\alpha} \mp \dfrac{\text{sin.}\beta}{\text{cos.}\beta}}{1 \pm \dfrac{\text{sin.}\alpha}{\text{cos.}\alpha} \cdot \dfrac{\text{sin.}\beta}{\text{cos.}\beta}} = \dfrac{\text{tang.}\alpha \mp \text{tang.}\beta}{1 \pm \text{tang.}\alpha \,.\, \text{tang.}\beta}$

Es ist klar, daß man durch Subst. von nn. 1, 9. in n. 69. noch folgende 2 Ausdrücke in Sinus und Cosinus erhalte:

71. $\text{tang}\ (\alpha \mp \beta) = \dfrac{\left(\text{cos.}\beta \cdot \sqrt{(1 - \text{cos.}\alpha^2)}\right) \mp \left(\text{cos.}\alpha \cdot \sqrt{(1 - \text{cos.}\beta^2)}\right)}{\text{cos.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta \pm \left(\sqrt{(1 - \text{cos.}\alpha^2)} \,.\, \sqrt{(1 - \text{cos.}\beta^2)}\right)}$

72. $\text{tang.}(\alpha \mp \beta)$

$$= \frac{(\text{sin.}\alpha . \sqrt{(1 - \text{sin.}\beta^2)}) \mp \text{sin.}\beta . \sqrt{(1 - \text{sin.}\alpha^2)}}{(\sqrt{(1 - \text{sin.}\alpha^2)} . \sqrt{(1 - \text{sin.}\beta^2)}) \mp \text{sin.}\alpha . \text{sin.}\beta .}$$

Anmerkung. Setzt man in n. 70 für $\alpha = 45°$ und für $\mp\beta = \frac{1}{2}\varphi$; so hat man

$$\text{tang.}(45° \mp \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{1 \mp \text{tang.}\frac{1}{2}\varphi}{1 - \text{tang.}45° . \text{tang.}\frac{1}{2}\varphi};$$

also für $\varphi = 90°$

$$\text{tang.}(45° \mp \tfrac{1}{2}90°) = \text{tang.}90° = \frac{1 \mp 1}{1 - 1}$$

$$= \frac{2}{0} = 2\infty .$$

Man wende ein ähnliches Verfahren auch auf die Sekante an. — Ich kann übrigens hier nur des, besonders von Kästner im 6ten Hefte des Archivs der reinen und angewandten Mathematik, 1797, über Tangenten und Sekanten des rechten Winkels in Ansehung der Gleichungen für dieselbe angeregten Streites erwähnen. Auf eine sehr scharfsinnige Art hat ihn Schulz im Anhange zur oben angeführten Entwickelung einiger der wicht. mathem. Theorien wider Kästner zu beendigen gesucht.

2. Da folglich, wenn $\varphi = 90°$, die Tangente und Sekante parallel und unendlich groß werden (man sehe auch §. 16. c.): so sollte die Definition von diesen Linien diese seyn: wenn die in dem einen Endpunkte des Kreisbogens ihn berührende Linie, und der im andern Endpunkte ihn schneidende Halbmesser einander schneiden, oder zu schneiden aufhören; so nennt man diese Linien Tangente und Sekante dieses Bogens oder seines Centriwinkels.

§. 50.

Für die Cotangente der Summe oder Differenz 2 Winkel.

73. $$\cot.(\alpha \mp \beta) = \frac{1 \pm \text{tang.}\alpha \,.\, \text{tang.}\beta}{\text{tang.}\alpha \mp \text{tang}\beta}$$ nn. 20,69.

74. $$\cot.(\alpha \mp \beta) = \frac{\left(\sqrt{(1 - \text{sin.}\alpha^2)}.\sqrt{(1 - \text{sin.}\beta^2)}\right) \pm \text{sin.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta}{\left(\text{sin.}\alpha \,.\, \sqrt{(1 - \text{sin.}\beta^2)}\right) \mp \text{sin.}\beta \,.\, \sqrt{(1 - \text{sin.}\alpha^2)}}$$ n. 72.

75. $$\cot.(\alpha \mp \beta) = \frac{\text{cos.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta \pm \left(\sqrt{(1 - \text{cos.}\alpha^2)}.\sqrt{(1 - \text{cos.}\beta^2)}\right)}{\left(\text{cos.}\beta \,.\, \sqrt{(1 - \text{cos.}\alpha^2)}\right) \mp \left(\text{cos.}\alpha \,.\, \sqrt{(1 - \text{cos.}\beta^2)}\right)}$$ n. 71.

§. 51.

§. 51.

Für die Sekante und Cosek. d. Sum. oder Differenz 2 Winkel.

76. $\text{Sec.}\ (\alpha \mp \beta) = \dfrac{1}{\text{cos.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta \pm \text{cos.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta}$ nn. 26, 63.

77. $\text{sec.}\ (\alpha \mp \beta) = \dfrac{\dfrac{1}{\text{cos.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta}}{1 \pm \dfrac{\text{sin.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta}{\text{cos.}\alpha \,.\, \text{cos.}\beta}} = \dfrac{\text{sec.}\alpha \,.\, \text{sec.}\beta}{1 \pm \text{tang}\,\alpha \,.\, \text{tang.}\beta}$ (wie n. 70.) nn. 26, 16.

78. $\text{cosec.}\ (\alpha \mp \beta) = \dfrac{1}{\text{sin.}\alpha \,.\, \text{cos}\,\beta \mp \text{cos.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta}$ n. 29. Dividirt mit sin. α. sin. β, giebt

79. $\text{cosec.}\ (\alpha \mp \beta) = \dfrac{\dfrac{1}{\text{sin.}\alpha \,.\, \text{sin.}\beta}}{\dfrac{\text{cos.}\beta}{\text{fin.}\beta} \mp \dfrac{\text{cos.}\alpha}{\text{sin}\,\alpha}} = \dfrac{\text{cosec.}\alpha \,.\, \text{cosec.}\beta}{\text{cot.}\beta \mp \text{cot.}\alpha}$ n. 21.

§. 52.

Für den Quersinus d. S. oder D. 2 Winkel.

80. Sin. v. $(\alpha \mp \beta)$

$= 1 - (\nu(1 - \text{sin.}\alpha^2).\nu(1 - \text{sin.}\beta^2). \pm \text{sin.}\alpha$ .sin. β) nn. 32, 67.

81. sin. v. $(\alpha \mp \beta)$

$= 1 - (\text{cos.}\alpha.\text{cos.}\beta \pm [\nu(1 - \text{cos.}\alpha^2).\nu(1 - \text{cos.}\beta^2)])$ n. 68.

§. 53.

Aus den bisher bewiesenen Formeln leite ich noch folgende ab:

Wie man §. 47. die 2 Formeln

60. $\text{sin.}(\alpha \mp \beta) \mp \text{sin.}(\alpha - \beta) = 2\,\text{sin.}\alpha.\text{cos.}\beta$, und

64. $\text{cos.}(\alpha - \beta) - \text{cos.}(\alpha \mp \beta) = 2\,\text{sin.}\alpha.\text{sin.}\beta$

erhielt, eben so bekömmt man durch Addit. u. Subtr. folgende 2:

82. $\text{sin.}(\alpha \mp \beta) - \text{sin.}(\alpha - \beta) = 2\,\text{cos.}\alpha.\text{sin}\,\beta.$

83. $\text{cos.}(\alpha \mp \beta) \mp \text{cos.}(\alpha - \beta) = 2\,\text{cos.}\alpha.\text{cos.}\beta.$

Setzt man in diesen Formeln

für $\alpha \mp \beta = \varphi$

für $\alpha - \beta = \psi$, so, daß also

$\alpha = \varphi - \beta = \psi \mp \beta$, also

$2\alpha = \varphi \mp \psi$, und eben so $2\beta = \varphi - \psi$, folglich

$\alpha = \frac{\varphi \mp \psi}{2}$ und $\beta = \frac{\varphi - \psi}{2}$ ist: so erhält man Formeln für Summen und Differenzen zweyer Sinusse und Cosin.

Cosin. aus Sin. und Cos. der halben Summen und halben Differenzen der Winkel;

Nämlich:

84. $\sin.\varphi \pm \sin.\psi = 2\sin.\frac{1}{2}(\varphi \pm \psi).\cos.\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$.

n. 60.

85. $\sin.\varphi - \sin.\psi = 2\cos.\frac{1}{2}(\varphi \pm \psi).\sin.\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$.

n. 82.

86. $\cos.\varphi \pm \cos.\psi = 2\cos.\frac{1}{2}(\varphi \pm \psi).\cos.\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$.

n. 83.

87. $\cos.\psi - \cos.\varphi = 2\sin.\frac{1}{2}(\varphi \pm \psi).\sin.\frac{1}{2}(\varphi - \psi)$.

n. 64.

§. 54.

Aus diesen Formeln werden weiter folgende für Tangenten und Cotangenten der halben Summen und halben Differenzen aus S. und D. der Sinusse und Cosin. abgeleitet;

88. $$\frac{\sin.\varphi \pm \sin.\psi}{\cos.\varphi \pm \cos.\psi} = \frac{2\sin.\frac{1}{2}(\varphi \pm \psi).\cos.\frac{1}{2}(\varphi - \psi)}{2\cos.\frac{1}{2}(\varphi \pm \psi).\cos.\frac{1}{2}(\varphi - \psi)}$$

$$= \frac{\sin.\frac{1}{2}(\varphi \pm \psi)}{\cos.\frac{1}{2}(\varphi \pm \psi)}$$

$= \tan g.\frac{1}{2}(\varphi \pm \psi)$ n. 16. — Eben so wird:

89. $$\frac{\sin.\varphi - \sin.\psi}{\cos.\varphi \pm \cos.\psi} = \tan g.\frac{1}{2}(\varphi - \psi).$$

$$90.\quad \frac{\sin.\varphi - \sin.\psi}{\cos.\psi - \cos.\varphi} = \cot.\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)$$

$$91.\quad \frac{\sin.\varphi + \sin.\psi}{\cos.\psi - \cos.\varphi} = \cot.\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi).$$

Weiter erhält man durch Division dieſer Formeln:

$$92.\quad \frac{\sin.\varphi + \sin.\psi}{\sin.\varphi - \sin.\psi} = \frac{\tang.\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\tang\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)}$$

$$93.\quad \frac{\cos.\psi - \cos.\varphi}{\cos.\varphi + \cos.\psi} = \frac{\tang.\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)}{\cot.\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi)}$$

$$= \tang.\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi).\tang.\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi).$$

D. Einige abgeleitete Formeln für beſtimmtere Fälle.

§. 55.

Es ſey 1) $\psi = 90° - \psi$, ſo iſt $\sin.\psi = \sin.(90° - \psi) = \cos.\psi$;

Alſo

$$94.\quad \sin.\varphi + \cos.\psi = 2\sin.\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi + 90°).\cos.\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi - 90°).\text{ n. 84.}$$

$$95.\quad \sin.\varphi - \cos.\psi = 2\cos.\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi + 90°).\sin.\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi - 90°).\text{ n. 85.}$$

$$96.\quad \frac{\sin.\varphi + \cos.\psi}{\cos.\varphi + \sin.\psi} = \tang\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi + 90°).\text{ n. 88}$$

$$97.\quad \frac{\sin.\varphi - \cos.\psi}{\cos.\varphi + \sin.\psi} = \tang.\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi - 90°).\text{ etc.}$$

2) Setzt man $\psi = 0$, so ist, weil $\cos. 0 = 1$ (§. 18.),

98. $\text{tang.} \frac{1}{2}\varphi = \frac{\sin.\varphi}{1 + \cos.\varphi}$ wie n. 48, und folglich

99. $\cot. \frac{1}{2}\varphi = \frac{1 + \cos.\varphi}{\sin.\varphi}$.

§. 56.

E. Aus den Formeln des §. 54, wenn man statt φ und ψ in den Formeln von 88—91. ihre Werthe wieder zurückschreibt, erhält man durch die Addit. und Subtr. für $\cos.\psi \pm \cos.\varphi$ seinen Werth aus nn. 86, 87. gesetzt, folgende Formeln, deren Gebrauch ist, die Summen und Differenzen der Tangenten zweyer Winkel aus dem Sinus der Summe und Differenz und Sin. und Cosin. der einzelnen zu bestimmen.

Es ist nach der Voraussetzung, daß φ und ψ wieder $= \alpha \pm \beta$ ist, $\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \alpha$, und $\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = \beta$;

$$\cos.\psi \pm \cos.\varphi = \cos.(\alpha - \beta) \pm \cos.(\alpha + \beta).$$

Demnach ist

100. $\text{tang.}\alpha + \text{tang.}\beta = \frac{\sin.(\alpha + \beta)}{\cos.\alpha . \cos.\beta}$ durch Addit. von nn. 88, 89.

101. $\text{tang.}\alpha - \text{tang.}\beta = \frac{\sin.(\alpha - \beta)}{\cos.\alpha . \cos.\beta}$ durch Subtr. n. 89 von n. 88.

102. $\cot.\alpha \pm \cot.\beta = \frac{\text{fin.}(\alpha \pm \beta)}{\text{fin.}\alpha . \text{fin.}\beta}$ durch Addit.

nn. 90, 91.

103. $\cot.\beta - \cot.\alpha = \frac{\text{fin.}(\alpha - \beta)}{\text{fin.}\alpha . \text{fin}\beta}$ durch Subtr.

n. 91 von 90.

Aus diesen Formeln folgt wieder durch Division:

104. $\frac{\text{tang.}\alpha \pm \text{tang.}\beta}{\text{tang.}\alpha - \text{tang.}\beta} = \frac{\text{fin.}(\alpha \pm \beta)}{\text{fin.}(\alpha - \beta)}$ von 100

mit 101.

105. $\frac{\cot.\alpha \pm \cot.\beta}{\cot.\beta - \cot.\alpha} = \frac{\text{fin.}(\alpha \pm \beta)}{\text{fin.}(\alpha - \beta)}$ von 102

mit 103.

106. $\frac{\text{tang.}\alpha \pm \text{tang.}\beta}{\cot.\alpha \pm \cot.\beta} = \text{tang.}\alpha . \text{tang}\beta$ von 100

mit 102.

107. $\frac{\text{tang.}\alpha - \text{tang.}\beta}{\cot.\beta - \cot.\alpha} = \text{tang.}\alpha . \text{tang.}\beta$ von 101

mit 103.

Aus Division von nn. 61, 62 erhält man auch, wenn man das einemal mit $\text{fin.}\alpha \text{ cof.}\beta$, das andremal mit $\text{fin.}\beta \text{ cof.}\alpha$ das 2te Glied der Gleichung dividirt:

108. $\frac{\text{cos.}(\alpha + \beta)}{\text{cos.}(\alpha - \beta)} = \frac{\text{cot.}\alpha - \text{tang.}\beta}{\text{cot.}\alpha + \text{tang.}\beta} = \frac{\text{cot.}\beta - \text{tang.}\alpha}{\text{cot.}\beta + \text{tang.}\alpha}$.

§. 57.

F. Aus den bisher deduzirten Formeln folgen mehrere sehr brauchbare Ausdrücke theils der trigonom. Linien für vielfache Bogen oder Winkel, theils der Potenzen der Sin. und Cosin.... der einfachen Winkel mittels der vielfachen.

Da diese Formeln von einander selbst abhängen: so sehe ich mich genöthigt, dieselben hier, um Weitläuftigkeit zu vermeiden, untereinander aufzustellen.

Setzt man in n. 57 für $\beta = \alpha$, so ist

109. $\text{sin. } 2\alpha = 2 \text{ sin.}\alpha \cdot \text{cos.}\alpha$; also auch $\text{sin.}\alpha = 2 \text{ sin.} \frac{1}{2}\alpha \cdot \text{cos.} \frac{1}{2}\alpha$, und

110. $\frac{\text{sin. } 2\alpha}{2} = \text{sin.}\alpha \cdot \text{cos.}\alpha$; und

111. $\frac{\text{sin.}\alpha}{\text{cos.}\alpha} + \frac{\text{cos.}\alpha}{\text{sin.}\alpha} = \frac{\text{sin.}\alpha^2 + \text{cos.}\alpha^2}{\text{sin.}\alpha \cdot \text{cos.}\alpha} = \frac{1}{\frac{\text{sin.}\alpha \text{ cos.}\alpha}{2}}$

(§. 11. Zus. 2.)

$= \frac{2}{\text{sin. } 2\alpha}$, n. 110. $= \text{tang.}\alpha + \text{cot.}\alpha$

nn. 16, 21. Woraus auch

$\frac{1}{\text{sin. } 2\alpha} = \frac{\text{tang.}\alpha + \text{cot.}\alpha}{2}$,

112. $\sin. 2\alpha = \frac{2 \text{tang.} \alpha}{1 + \text{tang.} \alpha^2}$ aus nn. 109, 4, 12.

folglich

113. $\sin. \alpha = \frac{2 \text{tang.} \frac{1}{2}\alpha}{1 + \text{tang.} \frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{2 \cot. \frac{1}{2}\alpha}{1 + \cot. \alpha^2}$ n. 18.

114. $\text{cos.} 2\alpha = \text{cos.} \alpha^2 - \sin. \alpha^2$. n. 62. $= \text{cos.} \alpha^2 - (\sqrt{(1 - \text{cos.} \alpha^2)})^2$. n. 1.
$= \text{cos.} \alpha^2 - 1 + \text{cos.} \alpha^2 = 2 \text{cos.} \alpha^2 - 1$;
oder für $\text{cos.} \alpha^2$ n. 9. subst.

115. $\text{cos.} 2\alpha = 1 - 2 \sin. \alpha^2$. Da folglich $2 \sin. \alpha^2$
$= 1 - \text{cos.} 2\alpha$, also
$1 - \text{cos.} 2\alpha$

116. $\sin. \alpha^2 = \frac{}{2}$.— Aus n. 114 ist

117. $\text{cos.} \alpha^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{cos.} 2\alpha = \frac{1 + \text{cos.} 2\alpha}{2}$. —

Woraus man auch sieht, daß

118. $\text{cos.} \alpha^2 + \sin. \alpha^2 = 1$ sey. — Weil $\text{cos.} 2\alpha$
$= 2 \text{cos.} \alpha - 1$: so ist auch

119. $\text{cos.} 2\alpha = \frac{1 - \text{tang.} \alpha^2}{1 + \text{tang.} \alpha^2}$ n. 12. folglich

120. $\text{cos.} \alpha = \frac{1 - \text{tang.} \frac{1}{2}\alpha^2}{1 + \text{tang.} \frac{1}{2}\alpha^2} = \frac{\cot. \frac{1}{2}\alpha - \text{tang.} \frac{1}{2}\alpha}{\cot. \frac{1}{2}\alpha + \text{tang.} \frac{1}{2}\alpha}$

121. $\sin. 3\alpha = \sin. (2\alpha + \alpha) = \sin. 2\alpha \text{ cos.} \alpha$
$+ \sin. \alpha . \text{cos.} \alpha$ (n. 57).

$= 2 \sin.$

$= 2 \sin.\alpha \cos.\alpha^2 + \sin.\alpha (1 - 2\sin.\alpha^2)$

nn. 109, 114.

$= 2 \sin.\alpha - 2 \sin.\alpha^3 + \sin.\alpha$

$-2 \sin.\alpha^3$. n. 9.

$= 3 \sin.\alpha - 4 \sin.\alpha^3$. — Also

122. $\sin.\alpha^3 = \dfrac{3 \sin.\alpha - \sin.3\alpha}{4}$.

123. $\cos.\alpha^3 = \cos.\alpha^2 . \cos\alpha = \dfrac{\cos.\alpha + \cos.\alpha.\cos.2\alpha}{2}$

n. 117.

124. $\cos.3\alpha = \cos.(2\alpha + \alpha) = \cos.\alpha . \cos.2\alpha -$

$\sin.\alpha . \sin.2\alpha$. n. 62.

$= \cos.\alpha . \cos.2\alpha - 2 \sin.\alpha^2 \cos.\alpha$

n. 109. Es ist aber nach n. 123

$2 \cos.\alpha^3 - \cos.\alpha = \cos.\alpha . \cos.2\alpha$;

also ist

$\cos.3\alpha = 2 \cos.\alpha^3 - \cos.\alpha - 2 \cos.\alpha + 2 \cos.\alpha^3$

n. 1.

$= 4 \cos.\alpha^3 - 3 \cos.\alpha$, also auch

125. $\cos.\alpha^3 = \frac{3}{4} \cos.\alpha + \frac{1}{4} \cos.3\alpha$. — Auch

durch Subst. von 2α für β hat man:

126. $\sin.3\alpha = \sin.2\alpha . \cos.\alpha + \cos.2\alpha . \sin.\alpha$, und

127. $\cos.3\alpha = \cos.2\alpha . \cos.\alpha - \sin.2\alpha . \sin.\alpha$. —

In diesen Formeln nn. 109, 114 subst., ist

128. $\sin.3\alpha = 3 \sin.\alpha \cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^3$.

129. $\cos.3\alpha = \cos.\alpha^3 - 3 \cos.\alpha . \sin.\alpha^2$.

130. $\cos.\alpha^4 = \cos.\alpha^2)^2 = \frac{1}{4} \mp \frac{1}{2}\cos.2\alpha \mp \frac{1}{4}\cos.2\alpha^2$.

n. 117.

$= \frac{1}{4} \mp \frac{1}{2}\cos.2\alpha \mp \frac{1}{8} \mp \frac{1}{8}\cos.4\alpha$.

n. 117.

$= \frac{3}{8} \mp \frac{1}{2}\cos.2\alpha \mp \frac{1}{8}\cos.4\alpha$.

Substituirt man α für $\mp \beta$ in n. 70. so erhält man

131. $\tang.2\alpha = \frac{2\tang.\alpha}{1 - \tang.\alpha^2}$. — Auf gleiche Weise wird aus n. 73.

132. $\cot.2\alpha = \frac{1 - \tang\alpha^2}{2\tang\alpha} = \frac{\cot.\alpha - \tang.\alpha}{2}$.—

Weil, wenn $\alpha = 45°$, $\tang.\alpha = 1$ §. 17. Zus. 3., ist ferner

133. $\tang.(45° \overline{\mp} \beta) = \frac{1 \overline{\mp} \tang.\beta}{1 \underline{\mp} \tang.\beta} = \frac{\cot.\beta \overline{\mp} 1}{\cot.\beta \underline{\mp} 1}$. n. 18.

Oder nach n. 69 ist

134. $\tang.(45° \overline{\mp} \beta) = \frac{\cos.\beta \overline{\mp} \cos.\beta.\tang.\beta}{\cos.\beta \underline{\mp} \cos.\beta, \tang.\beta}$. n. 25.

(wo näml. $\sin.\alpha = \cos.\alpha \times 1$, folglich $\cos.\alpha$ überall weggelassen wird)

$= \frac{\cos.\beta \overline{\mp} \sin.\beta}{\cos.\beta \underline{\mp} \sin.\beta}$ (wenn man

nämlich statt $\tang.\beta = \frac{\sin.\beta}{\cos.\beta}$ subst.)

Auf

Auf gleiche Art wenn man $\beta = 45°$ ſetzt, findet man nach nn. 69, 10

135. $\text{tang.}\,(\alpha - 45°) = \dfrac{\text{ſin.}\,\alpha - \text{coſ.}\,\alpha}{\text{ſin.}\,\alpha + \text{coſ.}\,\alpha}$. etc.

Unter derſelben Vorausſetzung, wie in nro. 109, iſt

136. $\text{cofec.}\,2\alpha = \dfrac{\text{cofec.}\,\alpha^2}{2\,\text{cot.}\,\alpha}$ n. 79. $= \dfrac{1 + \text{cot.}\,\alpha^2}{2\,\text{cot}\,\alpha}$

n. 22.

$$= \left[\frac{1}{\text{cot.}\,\alpha} + \text{cot.}\,\alpha\right] : 2 = \frac{\text{tang.}\,\alpha + \text{cot.}\,\alpha}{2}$$

n. 18.

Eben ſo iſt

137. $\text{ſec.}\,2\alpha = \dfrac{\text{ſec.}\,\alpha^2}{1 - \text{tang.}\,\alpha^2}$ n. 77. $= \dfrac{1 + \text{tang.}\,\alpha^2}{1 - \text{tang.}\,\alpha^2}$

$$= \frac{(1 + \text{tang.}\,\alpha)^2}{1 - \text{tang.}\,\alpha^2} - \frac{2\,\text{tang.}\,\alpha}{1 - \text{tang}\,\alpha^2}$$

$$= \frac{1 + \text{tang.}\,\alpha}{1 - \text{tang.}\,\alpha} - \frac{2\,\text{tang.}\,\alpha}{1 - \text{tang.}\,\alpha^2}$$

$= \text{tang.}\,(45° + \alpha) - \text{tang.}\,2\alpha$. nn. 133, 131.

Da $\text{tang.}\,\alpha^2 = \dfrac{\text{ſin.}\,\alpha^2}{\text{coſ.}\,\alpha^2}$, ſo iſt, die Werthe nn. 116, 117 dividirt,

138. $\text{tang.}\,\alpha^2 = \frac{1 - \text{cos.}\,2\alpha}{1 + \text{cos.}\,2\alpha}$.

Zusatz 1. $1 - \text{cos.}\,\alpha = 2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}\alpha \cdot \text{sin.}\,\frac{1}{2}\alpha$. n. 39.

$= \text{sin.}\,\frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{\text{sin.}\,\alpha}{\text{cos.}\,\frac{1}{2}\alpha}$ n. 109. $\text{sin.}\,\alpha$.

$\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha$. n. 16.

Daher

1. $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{1 - \text{cos.}\,\alpha}{\text{sin.}\,\alpha}$ und

2. $\text{tang.}\,\alpha = \frac{1 - \text{cos.}\,2\alpha}{\text{sin.}\,2\alpha}$.

3. $\text{tang.}\,\alpha = \frac{2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha}{1 - \text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha^2}$ n. 131.

$= \frac{2}{\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha - \text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha}$

$= \frac{2\,\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha}{\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha^2 - 1}$ n. 18.

Weil folglich $\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha - \text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{2}{\text{tang.}\,\alpha} = 2\,\text{cot.}\,\alpha$;

so ist auch

4. $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha = \text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha - 2\,\text{cot.}\,\alpha$ oder

5. $\text{tang.}\,\alpha = \text{cot.}\,\alpha - 2\,\text{cot.}\,2\alpha$.

Auf eine ähnliche Art kann man für $\text{cot.}\,\alpha$ und $\text{cot.}\,\frac{1}{2}\alpha$ folgern.

Zu-

Zusatz 2. Eben so ist aus n. 113

$$1.\ \sin.\alpha = \frac{2}{\cot.\frac{1}{2}\alpha \mp \tang.\frac{1}{2}\alpha}$$

Substituirt man hier aus n. 4 im Zus. 1. und dividirt den Bruch durch 2; so hat man

$$2.\ \sin.\alpha = \frac{1}{\cot.\alpha \mp \tang.\frac{1}{2}\alpha}$$

Zusatz 3. Aus n. 1. Zus. 1. ist

$$\tang.\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos.\alpha}{\sin.\alpha} = \frac{1-\cos.\alpha}{\tang.\alpha\cos.\alpha}\ \text{n. 2.}$$

$$\text{Also } \tang.\tfrac{1}{2}\alpha.\tang.\alpha = \frac{1-\cos.\alpha}{\cos.\alpha} = \frac{1}{\cos.\alpha} - 1.$$

$$\text{Folglich } \frac{1}{\cos.\alpha} = 1 \mp \tang.\tfrac{1}{2}\alpha.\tang.\alpha.$$ Woraus endlich

$$\cos.\alpha = \frac{1}{1 \mp \tang.\frac{1}{2}\alpha.\tang.\alpha}.$$

§. 58.

Einige zusammengesetzte Formeln, aus den vorstehenden abgeleitet.

139. $\cos.2\alpha - \cos.2\beta = 2(\sin.\alpha^2 - \cos.\beta^2)$ n. 114.
$= 2(\cos.\alpha \mp \cos.\beta).(\cos.\alpha - \cos.\beta).$

140. $\cos.2\alpha - \cos.2\beta = 2(\sin.\beta^2 - \sin.\alpha^2)$ n. 115.
$= 2(\sin.$

$= 2(\sin.\beta + \sin.\alpha) \cdot (\sin.\beta - \sin.\alpha)$.

141. $\sin.\alpha \cdot \cos.\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$. n. 110.

142. $\sin.\alpha^2 . \sin. 2\alpha = \sin. 2\alpha - \sin. 2\alpha . \cos.\alpha^2$. n. 1.

$$= \sin. 2\alpha - \frac{\sin. 2\alpha}{2}$$

$$= \sin. 2\alpha - \frac{\sin. 2\alpha \cdot \cos. 2\alpha}{2}$$ n. 117.

$= \frac{1}{2}\sin. 2\alpha - \frac{1}{4}\sin. 4\alpha$. n. 141.

143. $\sin. 2\alpha . \cos.\alpha = \sin. (2\alpha + \alpha) - \sin.\alpha \cos. 2\alpha$
(denn es ist $\sin.(2\alpha + \alpha) = \sin. 2\alpha \cos.\alpha + \cos. 2\alpha \sin.\alpha$. n. 57. also durch Versetzung $\sin. 2\alpha . \cos.\alpha$ etc.)

$= \sin. 3\alpha - \sin.\alpha (1 - 2\sin.\alpha^2)$. n. 115.

$= \sin. 3\alpha - \sin.\alpha + 2\sin.\alpha^3$

$$= \sin. 3\alpha - \sin.\alpha + \frac{6\sin.\alpha - 2\sin. 3\alpha}{4}$$ n. 122.

$= \frac{1}{2}\sin. 3\alpha + \frac{1}{2}\sin.\alpha$.

144. $\sin. 3\alpha . \cos.\alpha = \sin. (3\alpha + \alpha) - \sin.\alpha . \cos. 3\alpha$
(auf ähnliche Art wie in n. 143.)

$= \sin. 4\alpha - 4\sin.\alpha . \cos.\alpha^3 + 3\sin.\alpha . \cos.\alpha$. n. 124.

$= \sin. 4\alpha + \frac{3}{2}\sin. 2\alpha - 4\sin.\alpha . \cos.\alpha^2 . \cos.\alpha$ n. 141.

$=$ sin.

$= \sin. 4\alpha + \frac{3}{2} \sin. 2\alpha - 4 \sin. \alpha .$
$\cos. \alpha + 4 \sin. \alpha^3 . \cos. \alpha$, n. 9.

$= \sin. 4\alpha - \frac{1}{2} \sin. 2\alpha + 4 \cos. \alpha$
$\cdot \left[\frac{3 \sin. \alpha - \sin. 3\alpha}{4} \right]$ n. 122.

$= \sin. 4\alpha + \sin. 2\alpha - \sin. 3\alpha \cos. \alpha$

$= \sin. 3\alpha . \cos. \alpha$

folglich ist.

$\sin. 3\alpha . \cos. \alpha = \frac{1}{2} \sin. 4\alpha + \frac{1}{2} \sin. 2\alpha .$

145. $\sin. \alpha^3 . \cos. \alpha = \frac{3}{4} \sin. \alpha . \cos. \alpha - \frac{\sin. 3\alpha . \cos. \alpha}{4}$

n. 122.

$= \frac{3}{8} \sin. 2\alpha - \frac{1}{8} \sin. 4\alpha - \frac{1}{8} \sin. 2\alpha$

nn. 141, 144.

$= \frac{1}{4} \sin. 2\alpha - \frac{1}{8} \sin. 4\alpha .$

146. $\sin. \alpha . \cos. 3\alpha = \sin. 4\alpha - \sin. 3\alpha . \cos. \alpha$ (nach n. 144.)

$= \sin. 4\alpha - \frac{1}{2} \sin. 4\alpha - \frac{1}{2} \sin. 2\alpha .$

n. 144.

$= \frac{1}{2} \sin. 4\alpha - \frac{1}{2} \sin. 2\alpha .$

147. $\sin. \alpha . \cos. \alpha^3 = \frac{3}{4} \sin. \alpha . \cos. \alpha + \frac{1}{4} \sin. \alpha . \cos. 3\alpha$

n. 125.

$= \frac{3}{8} \sin. 2\alpha + \frac{1}{8} \sin. 4\alpha - \frac{1}{8} \sin. 2\alpha .$

nn. 141, 146.

$= \frac{1}{8} \sin. 4\alpha - \frac{1}{4} \sin. 2\alpha .$

§. 59.

Ich habe in §. 57. gezeigt, wie man aus den vorausgehenden Formeln Sinus und Cosinus vielfacher Winkel, wie auch die Potenzen derselben finden könne. Man sieht aber zugleich daraus ein, daß der Calcul zu weitläuftig und beschwerlich werden würde, wenn man fortfahren wollte, auf dieselbe Art das Problem immer nur für einzelne Fälle aufzulösen. Ich halte es daher nicht für überflüssig, die Aufg. allgemein zu stellen, und sie in dieser Allgemeinheit zu lösen, wie dieses auch Klemm, Karsten, Kästner...thaten.

Aufg. Aus dem gegebenen Sinus oder Cosinus des einfachen Winkels den Sinus und Cosinus des nfachen Winkels zu finden.

Aufl. Es ist $\sin. n\alpha = n \sin.\alpha . \cos.\alpha^{n-1}$

$$- \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3} \sin.\alpha^3 . \cos.\alpha^{n-3}$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} \sin.\alpha^5 .$$

$\cos.\alpha^{n-5}$ .....

Diese Gleichung enthält das Gesetz, welchem die Glieder der Reihe folgen. Will man daher den allgemeinen Ausdruck eines jeden auf das erste

fol-

folgenden Gliedes: so darf man nur z. B. statt der Zahlen 4 und 5, die sich in dem angeführten letzten Gliede der Gleichung befinden, und so auch in $\frac{n-2}{3}$ ——; folglich auch für die Exponenten von Sin. und Cosin. α allgemein, mittels m z. B. substituiren. So erhält man für jedes folgende Glied, je nachdem m eine gerade oder ungerade Zahl ist

$$\mp \frac{n.(n-1)(n-2)\ldots(n-2m)}{1.\ 2.\ 3\ldots\ 2m\mp 1} \sin.\alpha^{2m\mp 1}$$

$$\cos.\alpha^{n-(2m\mp 1)}$$

Eben so ist

$$\cos.n\alpha = \cos.\alpha^{n} - \frac{n.n-1}{1.\ 2} \sin.\alpha^2 \cos.\alpha^{n-2}$$

$$\pm \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.} \sin.\alpha^4 \cos.\alpha^{n-4}$$

$$- \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.} \sin.\alpha^6 \cos.\alpha^{n-6}$$

$$\mp \ldots\ldots$$

Auch nach dem aus dieser Gliederfolge ersichtlichen Gesetze der Reihe ist klar, daß der allge-

meine Ausdruck eines jeden folgenden Gliedes ist

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots n-(2m-1)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4\ \ldots\ 2m}$$

$$\sin.\alpha^{2m}.\cos.\alpha^{n-2m}$$

Beweis. Beyde Gleichungen für $\sin. n\alpha$ und $\cos. n\alpha$ sind gültig, wenn $n = 2$, und $n = 3$ ist, wie dieses erhellt aus §. 57. nn. 109, 114 u. s. w.

Setzt man in den Formeln nn. 57, 62 für $\beta = n\alpha$: so hat man

$$\sin.(n+1)\alpha = \sin. n\alpha.\cos.\alpha + \cos. n\alpha.\sin.\alpha.$$
$$\cos.(n+1)\alpha = \cos. n\alpha.\cos.\alpha - \sin. n\alpha.\sin.\alpha.$$

Diese Gleichungen zeigen, nach welchem Gesetze Sin. und Cosin. des vielfachen Winkels $(n+1)\alpha$ aus dem Sin. und Cosin. des nächstvorhergehenden vielfachen entstehen.

Man nehme also an, daß die in der Aufl. aufgestellten Gleichungen für $\sin. n\alpha$ und $\cos. n\alpha$ gültig seyen, und suche daraus die Gleichungen für $\sin.(n.+1)\alpha$ und $\cos.(n+1)\alpha$; setze aber der Kürze wegen $\sin.\alpha = s$ $\cos.\alpha = c$: so findet man

$$\sin. n\alpha.\cos\alpha = ns.c^n - \frac{n.n-1.n-2.}{1.\ 2.\ 3.} s^3 c^{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{n.(n-1)\ldots(n-[2m-1]).(n-2m)}{1.\ 2.\ \ldots\ 2m.(2m+1)} s^{2m+1}.c^{n-2m}$$

$$\text{cof. } n\alpha \text{ , fin. } \alpha = s.c^{n} - \frac{n\,.\,n-1}{1.\ 2.}\,s^{3}.c^{n-2} \mp \ldots$$

$$\mp \frac{n(n-1)\ldots n-(2m-1)}{1.\ 2.\ldots\ 2m}\,s^{2m\mp 1}\ ,$$

$$c^{n-2m}$$

Beydes addirt, giebt

$$\text{fin. } (n\mp 1)\alpha = (n\mp 1)\,s.c^{n} - \frac{(n\mp 1)\,.\,n\,.\,(n-1)}{1.\ 2.\ 3.}$$

$$s^{3}.c^{n-2} \mp \ldots$$

$$\mp \frac{(n\mp 1)\,.\,n\,.\,(n-1)\ldots\ n\mp 1-2m}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ (2m\mp 1)}$$

$$s^{2m\mp 1}\,.\,c^{n-2m}$$

Ferner findet man auf gleiche Art:

$$\text{cof. } n\alpha\,.\,\text{cof. } \alpha = c^{n\mp 1} - \frac{n\,.\,n-1}{1\ .\ 2}\,s^{2}c^{n-1} \mp \ldots$$

$$\mp \frac{n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,..\,(n-[2m\mp 1])}{r\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots(2m-1)\,.\,2m}$$

$$s^{2m}\,.\,c^{n-2m\mp 1}$$

$$\mp \text{ sin. } n\alpha \text{ . sin. } \alpha = -\frac{n}{1} s^2 c^{n-1} \mp \ldots$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \ldots n-(2m-2)}{1 \cdot 2 \ldots (2m-1)} \Big\} \mp s^{2m} \cdot c^{n-2m} \mp 1$$

Aus beyden Werthen findet man das obige

$$\text{cos. } (n \mp 1)\alpha = c^{n \mp 1} - \frac{(n \mp 1)n}{1 \cdot 2} s^2 c^{n-1} \mp \ldots$$

$$\frac{(n \mp 1).n.(n-1)..(n \mp 2m[2m-1])}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2m-1).2m} \Big\} \mp s^{2m} \cdot c^{n-2m \mp 1}$$

Diese beyden Gleichungen erhält man auch aus den für sin. $n\alpha$ und cos. $n\alpha$ in der Aufl. angenommenen Gleichungen, wenn man in denselben für n $n \mp 1$ substituirt. Wenn also diese Gleichungen für $n\alpha$ gültig sind: so gelten sie auch für $(n \mp 1)\alpha$; nun sind sie aber gültig, wenn $n = 2 = 3$ ist; mithin auch für $n \mp 1 = 4$ und für $n \mp 1 = 4 \mp 1 = 5$, und so ins Unendliche; Folglich gelten sie, welche ganze Zahl auch n bedeuten mag.

Zusatz 1. Es ist folglich

sin. $\alpha = s$	cos. $\alpha = c$
sin. $2\alpha = 2cs$	cos. $2\alpha = c^2 - s^2$
sin. $3\alpha = 3sc^2 - s^3$	cos. $3\alpha = c^3 - 3cs^2$

sin.

$\text{sin.}\,4\alpha = 4sc^3 - 4cs^3$	$\text{cos.}\,4\alpha = c^4 - 6c^2s^2 + s^4$
$\text{sin.}\,5\alpha = 5c^4 s - 10\,cs^{2\,3} + s^5$	$\text{cos.}\,5\alpha = c^5 - 10\,c^3\,s^2 + 5cs^4$
$\text{sin.}\,6\alpha = 6c^3 s - 20\,c^3 s^3 + 6cs^5$	etc.
etc.	

Zusatz 2. Der berühmte Abbé de la Caille hat in seinen leçons elementaires de Mathematiques, nouv. edit. par M. l'Abbé Marie pag. 288. ähnliche Gleichungen für die Tangenten und Cotangeten aufgestellt, welche aber nach unserer Methode nicht nöthig sind, indem Tang. und Cot., wie ihre ursprünglichen Formeln zeigen, aus den gefundenen Sin. und Cosin. leicht gefunden werden. Weil nämlich $\text{tang.}\,n\alpha = \frac{\text{sin.}\,n\alpha}{\text{cos.}\,n\alpha}$: so ist, wenn man $\text{tang.}\,\alpha = t$ setzt,

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{\text{sin.}\,\alpha}{\text{cos.}\,\alpha} = t.$$

$$\text{tang.}\,2\alpha = \frac{\text{sin.}\,2\alpha}{\text{cos.}\,2\alpha} = \frac{2cs.}{c^2 - s^2} \text{ durch } c^2 \text{ divid.}$$

$$= \frac{2t}{1 - t^2} \text{ (S. n. 131.)}$$

$$\text{tang.}\,3\alpha = \frac{3sc^2 - s^3}{c^3 - 3cs^2} \text{ durch } c^3 \text{ dividirt}$$

$$= \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}. \text{ — Auf gleiche Art wird}$$

$$\text{tang. } 4\alpha = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6t^2 + t^4} \text{ . etc.}$$

Hieraus folgt weiter

$$\cot.\alpha = \frac{1}{t}\text{ ; } \cot. 2\alpha = \frac{1-t^2}{2t} \text{ (S. n. 132) ; } \cot. 3\alpha$$

$$= \frac{1 - 3t^2}{3t - t^2} \text{ . etc.}$$

Zusatz 3. Wenn man in den obigen Formeln Zus. 1. für $\text{cos.}\alpha = c$ und für $\text{sin.}\alpha = s$ ihre Werthe $\sqrt{(1-s^2)}$ und $\sqrt{(1-c^2)}$ substituirt: so erhält man

$\text{sin}\,\alpha = s$	$\text{cos.}\,\alpha = c$
$\text{sin. } 2\alpha = 2s\sqrt{(1-s^2)}$	$\text{cos. } 2\alpha = 2c^2 - 1$
$\text{sin. } 3\alpha = 3s - 4s^3$) wie n. 121.	$\text{cos. } 3\alpha = 4c^3 - 3c$
$\text{sin. } 4\alpha = (4s - 8s^3\sqrt{(1-s^2)}$.	$\text{cos. } 4\alpha = 8c^4 - 8c^2 + 1$
$\text{sin. } 5\alpha = 5s - 20s^3 + 16s^5$	$\text{cos}\,5\alpha = 16c^5 - 20c^3 + 5c$. etc.

$$\text{sin. } 6\alpha = (6s - 32s^3 + 192s^5 - 128s^7)\sqrt{(1-s^2)}.$$

etc.

Zusatz 4. Wollte man daher irgend einen Bogen oder Winkel in eine gegebene Anzahl gleicher Theile theilen: so würden hiezu die ebengesetzten Formeln dienen. Um ihn z. B. in 2 gleiche Theile zu theilen, diente die Gleichung $\text{sin. } \alpha = 2s\sqrt{(1-s^2)}$; in 3 — die Gleichung $\text{sin. } \alpha = 3s - 4s^3$ u. s. w.

§. 60.

Ich habe nun noch zu zeigen, wie man aus diesen letzten Formeln des §. 59. Zus. 3. alle Potenzen von Sin. α und auch von Cos. α finden könne.

Nämlich unmittelbar aus denselben findet man blos durch Versetzung der Glieder, und dann durch Substitution des schon Gefundenen, die ungeraden Potenzen. So ist, wenn man für s wieder sin. α und für c cos. α setzt,

$$\sin.\alpha = \sin.\alpha$$
$$4\sin.\alpha^3 = 3\sin.\alpha - \sin.3\alpha$$
$$16\sin.\alpha^5 = 10\sin.\alpha - 5\sin.3\alpha + \sin.5\alpha.$$

Setzte man jene Formeln weiter fort: so erhielte man auch

$$64\sin.\alpha^7 = 35\sin.\alpha - 21\sin.3\alpha + 7\sin.5\alpha - \sin.7\alpha. \text{ etc.}$$

Will man die geraden Potenzen vom Sin. finden: so darf man nur eben diese Gleichungen mit $2\sin.\alpha$ multipliziren, und die erhaltenen Produkte nach n. 64 auflösen; wobey man sich erinnern muß, daß $\cos.(\alpha-\alpha)$ oder $\cos.0\alpha = 1$ §. 18.

Es ist nämlich:

$$2\sin.\alpha^2 = 1 - \cos.2\alpha$$
$$8\sin.\alpha^4 = 3.\ 2\sin.\alpha^2 - 2\sin.3\alpha.\sin.\alpha$$
$$= 3 - 3\cos.2\alpha - \cos.2\alpha + \cos.4\alpha$$
$$= 3 - 4\cos.2\alpha + \cos.4\alpha. \text{ — Eben so}$$
$$32\sin.\alpha^6 = 10 - 15\cos.2\alpha + 6\cos.4\alpha - \cos.6\alpha,$$
$$128\sin.\alpha^8 = 35 - 56\cos.2\alpha + 28\cos.4\alpha - 8\cos.6\alpha + \cos.8\alpha.$$

Die Potenzen von Cosin. α folgen unmittelbar schon aus jenen Formeln: Nämlich

$$2\cos.\alpha^2 = 1 + \cos.2\alpha$$

$$4\cos.\alpha^3 = 3\cos.\alpha + \cos.3\alpha$$

. Und für c^2 subst it.

$$8\cos.\alpha^4 = 3 + 4\cos.2\alpha + \cos.4\alpha$$

. Eben so

$$16\cos.\alpha^5 = 10\cos.\alpha + 5\cos.3\alpha + \cos.5\alpha$$

.etc.

Das aus diesen Gleichungen hervorgehende Gesetz der Conffizienten der Werthe, welches, wenn man sie mit den Binominal-Coeffizienten vergleicht, leicht ersichtlich ist, hat Herr Prof. Klügel in seiner analytischen Trigonometrie S. 121—124 dargestellt und bewiesen.

Allgemeine Anmerkung.

Der vorzügliche Gebrauch dieser trigonometrischen Formeln besteht nicht nur im Auffinden der Zahlen für die trigonometrischen Linien oder Funktionen, und in der leichten Auflösung mehrerer trigonometrischer Aufgaben; sondern sie dienen auch dazu, unmittelbar aus denselben Lehrsätze zu entwickeln, welche für die Trigonometrie wichtig genug sind. Beyspiele hiezu werden im Verlaufe mehrere vorkommen. Ohne einen großen Theil jener Formeln zu kennen, ist auch z. B. die Berechnung der elliptischen Bewegung der Planeten, wie sie in Schubart's theoret. Astronomie angestellt wird, schlechterdings unverständlich.

In

In diesen trigonometrischen Funktionen bietet uns die Trigonometrie auch ein leichtes Mittel dar, jede Aufgabe vom 2ten und 3ten gemischten Grade aufzulösen. Noch ehe ich weiter fortgehe, will ich diese Methode so kurz als möglich angeben.

Aus der niedern Analysis weiß man, daß Aufgaben vom reinen Grade diejenigen sind, in welchen die unbekannte Größe nur unter demselben Exponenten vorkömmt; vom gemischten aber, wenn das Gegentheil statt findet. Vom wievielsten Grade jedes Problem sey, bestimmt der höchste Exponent der unbekannten Größe. Da man die Aufgabe, in welcher der niedrigste Exponent der Unbekannten die Hälfte ist vom höchsten derselben Größe, so behandeln kann, wie eine Aufgabe vom zweyten gemischten Grade: so hat man auch von jener die Definition für diese hergenommen, um die Auflösung aller Fälle dieser Art in einer Generalauflösung vorzuweisen.

A. Auflösung der Probleme vom zweyten gemischten Grade mittels trigonometrischer Funktionen.

Die Formel für diese Aufgaben kann seyn:

$$x^2 \pm ax = b;$$

Woraus durch Analysis $x = \mp \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 \mp b\right)}$

Sind

Sind nun a und b sehr groß, oder Brüche, oder ist das, was unter dem Wurzelzeichen steht, kein vollkommnes Quadrat: so weiß man, daß die Auffindung des Werthes von x nach gewöhnlicher Art sehr schwer ist.

Indem man nun die 2te Wurzel aus $\frac{a^2}{4}$ vor dem Wurzelzeichen schreibt, und mit $\frac{a^2}{4}$ die Größe unter dem Wurzelzeichen dividirt, um den Werth des Gliedes oder die Gleichung nicht zu verletzen: so erhält man, unter der Voraussetzung von $\pm V$, statt jener letzten Gleichung diese:

$$x = -\tfrac{1}{2}a.\left[1 - V\left(1 \pm \frac{4b}{a^2}\right)\right].$$

Setzt man nun $V\left[1 \pm \frac{4b}{a^2}\right] = V(1 \pm \text{tang.}\,\alpha^2)$, oder

$$1 \pm \frac{4b}{a^2} = 1 \pm \text{tang.}\,\alpha^2 : \text{so hat man}$$

$$1.\ \text{tang.}\,\alpha = \frac{2Vb}{a}; \text{ folglich}$$

$$2.\ \tfrac{1}{2}a = \frac{Vb}{\text{tang.}\,\alpha} = \frac{\text{cos.}\,\alpha\, Vb}{\text{sin.}\,\alpha}\ \text{n. 16.}$$

Daher

Daher ist

$$3.\ x = -\frac{\text{cof.}\alpha \sqrt{b}}{\text{sin.}\alpha}\left\{1 - \frac{1}{\text{cof.}\alpha}\right\}.\ \text{n. 12.}$$

$$= \frac{\text{cof.}\alpha \sqrt{b}}{\text{sin.}\alpha} \cdot \frac{1 - \text{cof.}\alpha}{\text{cof.}\alpha} = \frac{1 - \text{cof.}\alpha}{\text{sin.}\alpha} \cdot \sqrt{b}$$

Also $x = \text{tang.}\frac{1}{2}\alpha \cdot \sqrt{b}$. §. 57. Zuf. 1. n. 1.

Beyspiel. Es sey $a = \frac{6}{7}$ und $b = \frac{153}{175}$.

Also 1.) $\text{tang.}\alpha = \frac{14}{6}\sqrt{\frac{153}{175}}$, oder durch Logarithmen.

log. 153 = 2,1846914

arithm. Compl. log. 175 (§. 32. Zuf. 3) = 7,7569620

9,9416534 — 10

halbe Summe 4,9708267 — 5.

log. 14 = 1,1461280

arithm. Erg. log. 6 = 9,2218487 — 10

log. tang. α = 0,3388034.

Woraus $\alpha = 65°\ 22'\ 32'',43$ (§. 32. Zuf. 1.)

$\frac{1}{2}\alpha = 32°\ 41'\ 16'',21.$

2) $\alpha = \text{tang.}\frac{1}{2}\alpha \sqrt{\frac{153}{175}}$ durch Rechnung

log.

log. tang. 32° 41′ = 9,8072494 — 10.

§. 33. Schol.

Proportionaltheile wegen 16″, 21 ... 751 (§. 32)

9,8073245 — 10.

obige halbe Summe 4,9708267 — 5

log x = 0,7781512 — 1

Folglich $x = 0{,}6 = \frac{3}{5}$. Diesen Werth für x in der Gleichung $x^2 + ax = b$ substituirt; sieht man, daß er richtig aufgefunden worden.

Zusatz 1. Gälte $-\nu$ in obiger Gleichung: so erhielte man $x = -\frac{1}{2}a.\left[1 + \frac{1}{\cos.\alpha}\right] = -\frac{1+\cos.\alpha}{\sin.\alpha}$

$$\nu b = -\cot.\tfrac{1}{2}\alpha\ \nu b$$

n. 51. — Nimmt man daher in unserem Beyspiele das Complement für tang. $\frac{1}{2}\alpha$: so erhält man log. — x.

Zusatz. 2. Hat man eine Gleichung von der Form

$$x^2 + ax = -b$$

so erhält man, unter der Voraussetzung von $+\nu$,

$$x = -\tfrac{1}{2}a\left[1 - \nu\left(1 - \frac{4b}{a^2}\right)\right]$$

Setzt

Setzt man $\sqrt{\left[1-\frac{4b}{a^2}\right]} = \sqrt{(1-\sin.\alpha^2)} = \cos.\alpha$

n. 9. oder $1-\frac{4b}{a^2} = 1-\sin.\alpha^2$, oder $\sin.\alpha^2 = \frac{4b}{a^2}$

und $\sin.\alpha = \frac{2}{a}\sqrt{b}$; folglich $\frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{b}}{\sin.\alpha}$; so bekömmt man

$$x = -\frac{\sqrt{b}}{\sin.\alpha}(1-\cos.\alpha)$$

$$= -\tang.\tfrac{1}{2}\alpha.\sqrt{b}.$$

Zusatz 3. Gilt aber $-\sqrt{}$; so gilt zwar der Werth für $\frac{1}{2}\alpha$, aber für x erhält man, wie Zus. 1, $-\cot.\frac{1}{2}\alpha.\sqrt{b}$.

B. Auflösung der Probleme vom dritten gemischten Grade mittels der trigonometrischen Funktionen.

Man habe folgende geordnete Gleichung vom dritten gemischten Grade:

$$x^3 * + + ax + b = o.$$

Man setze in dieser Gleichung $x = y + z$: so hat man

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + ay + az + b = o.$$

Setzt man $y^3 + z^3 + b - o$ und dividirt den Rest der vorigen Gleichung durch $y + z$: so hat man

$3yz + a = o$, folglich $y = -\frac{1}{3}a : z$

Dieser

Diesen Werth in der ersten Gleichung substituirt, ist

$$z^6 + bz^3 - \tfrac{1}{27} a^3 = 0, \text{ woraus}$$

$$z = \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2} b \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{27} a^3)}\right]}$$

gefunden wird.

Es ist ferner unter obiger Voraussetzung $y^3 = -z^3 - b = -\tfrac{1}{2} b \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{27} a^3)}$

folglich $y = \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2} b \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{27} a^3)}\right]}$

Also $y + z = x = \sqrt[3]{\left[(-\tfrac{1}{2} b + \sqrt{(\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{27} a^3)}\right]} + \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2} b - \sqrt{(\tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{27} a^3)}\right]}$

Dieß die analytische Auflösung!

Verfährt man hiemit wieder wie unter A.: so hat man statt dieser letzten Gleichung folgende:

$$x = \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2} b + \tfrac{1}{2} b \sqrt{\left(1 + \frac{4a^3}{27b^2}\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[-\tfrac{1}{2} b - \tfrac{1}{2} b \sqrt{\left(1 + \frac{4a^3}{27b^2}\right)}\right]}$$

Setzt man nun wieder $\sqrt{\left[1 + \frac{4a^3}{27b^2}\right]} = \sqrt{(1 + \text{tang}\,\alpha^2)} = \frac{1}{\text{cos}.\,\alpha}$. n. 12. oder $\frac{4a^3}{27b^2} = \text{tang}.\,\alpha^2$: so hat man

1. $\text{tang.}\,\alpha = \frac{a}{3b} . 2\sqrt{\frac{1}{3}a}$, und hieraus folglich

2. $x = \sqrt[3]{\left[-\frac{1}{2}b.\left(1-\frac{1}{\cos.\alpha}\right)\right]} + \sqrt[3]{\left[-\frac{1}{2}b.\left(1+\frac{1}{\cos.\alpha}\right)\right]}$

Zur Abkürzung sey $2\sqrt{\frac{1}{3}a} = m$; daher $a = \frac{3}{4}m^2$,

und $\text{tang}\,\alpha = \frac{m^3}{4b}$, woraus $\frac{1}{2}b = \frac{m^3}{8\,\text{tang.}\,\alpha}$; diesen

Werth in 2. substituirt, ist

$$x = \sqrt[3]{\left[-\frac{m^3}{8\,\text{tang.}\,\alpha}.\frac{\cos.\alpha - 1}{\cos.\alpha}\right]} + \sqrt[3]{\left[\frac{m^3}{8\,\text{tang.}\,\alpha}.\frac{\cos.\alpha + 1}{\cos.\alpha}\right]}$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\sqrt[3]{\left[\frac{1-\cos.\alpha}{\sin.\alpha}\right]} - \sqrt[3]{\left[\frac{1+\cos.\alpha}{\sin.\alpha}\right]}\right]. \text{ n. 16.}$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\sqrt[3]{\left[\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\alpha\right]} - \sqrt[3]{\left[\cot.\,\tfrac{1}{2}\alpha\right]}\right] \text{ §. 57. Zuſ. 1.}$$

n. 1, und n. 51.

Oder $x = -\frac{m\sqrt[3]{\cot.\,\frac{1}{2}\alpha} - \sqrt[3]{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha}}{2}$

Aus n. 132 ist $\cot. 2\alpha' = \frac{\cot. \alpha' - \text{tang}. \alpha'}{2}$

Setze ich nun $\text{tang}. \alpha' = \sqrt[3]{\text{tang}. \frac{1}{2}\alpha}$; so

wird folglich $\cot. 2\alpha' = \frac{\sqrt[3]{\cot. \frac{1}{2}\alpha} - \sqrt[3]{\text{tang}. \frac{1}{2}\alpha}}{2}$

Demnach ist

$$3.\ x = -\cot. 2\alpha' \cdot m$$
$$= -\cot. 2\alpha' \cdot 2\sqrt{\tfrac{1}{3}a}.$$

Beyspiel. Es sey $a = 8$, $b = 264$.

1.) $\text{tang}. \alpha = \frac{8}{7\frac{8}{9}2} \cdot \sqrt{\frac{32}{3}}$

Oder log. 8	= 0,9030900
arithm. Compl. log. 792	= 7,1012748 — 10
Summe	0,0043648 — 2
log. 32	= 1,5051500
arithm. Compl. log. 3	= 9,5228787
	11,0280287
halbe Summe	0,5140143
log. tang. α	= 8,5183791
α	$= 1^\circ 53' 22'', 16$
$\frac{1}{2}\alpha$	$= 56' 41'', 08$

2) $\text{tang}. \alpha' = \sqrt[3]{\text{tang}. \frac{1}{2}\alpha}$

oder

oder tang. $56' 40'' = 8{,}2170931$ Proportional-

theile wegen 1 ,08 1378 §. 32. Zus. 1.

$8{,}2172309$

Dividirt durch 3. . . . $9{,}4057436$ (§. 32. Zus. 4.

$= \text{tang. } \alpha'$.

Daher $\alpha' = 14° \; 16' \; 49'' \; ,47$

also $2\alpha' = 28° \; 33' \; 38'' \; ,94$

3) $x = -\cot. 2\alpha' \sqrt[3]{\frac{32}{3}}$

oder log. cot. $28° \; 33'$ $= 10{,}2643323 - 10$

Proportionalth. weg. $38'' \; ,94 \ldots . 1952$ §. 32. Zus. 1.

$10{,}2641371 - 10$

log. $\sqrt[3]{\frac{32}{3}}$ $= 0{,}5140143$

log. $-x = 0{,}7881514$

Woraus $x = -6$ gefunden wird.

Zusatz. Weil, wenn die Gleichung diese ist: $x^3 + ax - b = o$ dann in der analytischen Auflösung $\frac{1}{2}$ b positiv wird; so findet man alles, wie vorher, nur in 3) wird $x = \cot. 2\alpha' . 2\sqrt[3]{\frac{1}{3}a}$. *)

*) Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes enthält Cagnoli Traité de Trigonometrie. Cap. XII.

Ebene Trigonometrie.

Der ebenen Trigonometrie erster Abschnitt von der Auflösung rechtwinklichter Dreyecke*).

§. 61.

Die Auflösung rechtwinklichter Dreyecke kann, da immer der rechte Winkel unter die bekannten oder gegebenen Stücke gehört, auf folgende 4 Fälle gebracht werden:

Es sind gegeben

1) — 1 spitzer Winkel und ein Kathetus;
2) — 1 ein spitzer Winkel und die Hypotenuse;
3) — 1 Kathetus und die Hypotenuse;
4) — 2 Katheten.

Auf-

*) Ungeachtet die Grundsätze, die bey der Resolution der schiefwinklichten Dreyecke vorkommen, allgemein für das geradlinigte Dreyeck gelten, worunter folglich das rechtwinklichte, wie ein besonderer Fall, immer nur subsumirt werden dürfte, um auch für es die Auflösung des allgemeinen Falles zu haben: so habe ich doch der Deutlichkeit und Kürze willen diesem Gegenstande einen eigenen Abschnitt gewidmet.

Auflösung dieser 4 Fälle durch folgende 2 Analogien:

a. Ist die Hypotenuse unter den gegebenen Stücken, so setzt man:

Der Halbmesser der Tafeln verhält sich zum Sinus des spitzen Winkels, wie die Hypotenuse zu dem jenem Winkel entgegenstehenden Kathetus.

b. Sind aber Katheten und spitze Winkel gegebene Stücke, so setzt man:

Der Halbmesser der Tafeln verhält sich zur Tangente des spitzen Winkels, wie der an diesem Winkel liegende Kathetus zu dem eben diesem Winkel entgegenstehenden Kathetus.

Beweis 1. von a. Es sey das Dreyeck ACF; BC stelle den Halbmesser der Tafeln vor. Zieht man nun aus C den Bogen BE: so ist das auf CE gefällte Loth BD der Sinus von BE oder des Winkels BCE = ACF. Weil nun △ BDC ∾ △AFC, so ist Fig. 4.

BC : DC = AC : FC, oder, weil der W. CBD = CAF, CD aber der Cos. C oder sin. CBD ist, so geht jene Proportion in diese über:

r : sin. CAF = AC : CF. Eben so ist r. sin. ACF. = AC : AF.

Beweis 2. von b. Es stelle nun CB den Halbmesser der Tafel vor; man ziehe den Bogen BE aus C: so ist das in B errichtete Perpendi- Fig. 13.

kel DB die Tangente von BE oder des Winkels C.

Nun ist, wie vorher:

$$BC : BD = FC : FA,$$

d.i. $r : \text{tang. } FCA = FC : FA$.

Durch ähnliche Konstruktion läßt sich beweisen, daß auch

$$r : \text{tang. } FAC = AF : FC,$$

folglich ist der Beweis allgemein.

Zusatz 1. Sind die Sinusse oder Cosinusse eines Winkels zu groß: so kann man diesen mittels der gewöhnlichen im gleich folgenden Schema angegebenen Formeln nicht genau finden. In einem solchen Falle muß man sich daher einer der folgenden Formeln bedienen, wodurch man zunächst die Hälfte des zu suchenden Winkels findet.

Es ist nämlich $a : c = 1 : \text{cos. } B$,*) oder

$$a : a - c = 1 : 1 - \text{cos. } B$$

$$= 1 : 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2} B^2 \quad \text{n. 116.}$$

Also $2 \text{ sin. } \frac{1}{2} B^2 = \frac{a - c}{a}$, oder

$$1. \text{ sin. } \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{a - c}{2a}}$$

Eben so wird aus der ersten Analogie

$$a + c : a - c = 1 + \text{cos. } B : 1 - \text{cos. } B$$

$$= 1 : \frac{1 - \text{cos. } B}{1 + \text{cos. } B}$$

$$= 1 : \text{tang. } \tfrac{1}{2} B^2 \quad \text{n. 138.}$$

Also

*) Nach der Bezeichnungsart im Schema.

Also 2. tang. $\frac{1}{2}$ B $= \sqrt{\frac{a-c}{a+c}}$

Verwechselt man den Winkel B mit C folglich auch c mit b; so hat man eben so sin. $\frac{1}{2}$ C $= \sqrt{\frac{a-b}{2a}}$

und tang. $\frac{1}{2}$ C $= \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

Beyspiel. Es stelle BEP einen Theil der Meeresfläche vor; auf welche herab bis M ein Beobachter in S in einer Höhe von z B. 34 Schuhen sieht: man verlangt nun die Neigung der Sehlinie, oder den Winkel NSM, welche diese mit der horizontalen durch das Auge des Beobachters gehenden Linie bildet, zu wissen. Tab. I. Fig. 13.

In dem in M rechtwinklichten Dreyecke CMS ist nun nebst M der Erdhalbmesser CM = 19611324 Fußen, und CS = 196...+34 bekannt. Denkt man sich nun beyde Linien SN und CM fortgezogen: so sieht man, daß das Perpendikel SM, aus dem rechten Winkel S gezogen, das Ganze in 2 ähnliche Dreyecke theilt, wo NSM = MCS. Diesen Winkel C nun wie gewöhnlich zu finden, dient die Gleichung im zweyten Falle aus der Tabelle, es ist nämlich cos. C $= \frac{CM}{CS}$; oder durch Logarithmen

log. CM = 7,2925067

arithm. Erg. log. CS = 2,7074925

log. cos. C = 9,9999992

Die Sinustafel giebt nun den diesem Logar. entsprechenden Cos. eines Winkels von 0° 6′ 30″ oder 6′ 40″, folglich nicht genau an. Da ferner mittels der kleineren Tafeln der Log zu 8 Zahlen nicht genau gefunden ist; so könnte auch der Werth von C zwischen 6′ 10″ und 6′ 40″ liegen; wie sich dieses auch findet, wenn man nach einer der vorigen Formeln die Rechnung anstellt:

Nämlich $\sin. \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1}{2}(CS - CM) : CS}$, oder

log. 34. = 1,2304489

arithm. Erg. log. CS = 2,7074925

3,9379414

log. $\sin. \frac{1}{2} C$ = 6,9689707 §. 32.

Zus. 4.

Woraus man $\frac{1}{2} C = 3' 12'', 5$; folglich $C = 0° 6' 25''$ findet.

Wollte man wissen, bis zu welchem äußersten Punkte der Meeresfläche das Auge, in einer Höhe von 34 Fußen über dieselbe, reichen könne: so dürfte man nur MS bestimmen.

Zusatz 2. Nimmt man vermöge jener ersten Analogien die Hypotenuse als Halbmesser: so werden die Katheten Sinusse der entgegenstehenden Winkel.

Nimmt man einen Kathetus als Halbmesser an: so wird der andre Kathetus die Tangente des gegenüberstehenden Winkels, die Hypotenuse die Sekante.

Tabelle für die Resolution geradliniger rechtwinklichter Dreyecke.

Gegeben	Gesucht	Auflösung	Gleichungen, wobey der Halbm. = 1
b, c	B	c : b = r : tang. B	tang. B = $\frac{b}{c}$ = cot. C.
	C	b : c = r : tang. C	
	a	sin. B : r = b : a	
b, a	B	a : b = r : sin. B	sin. B = $\frac{b}{a}$ = cos. C.
	C	itzt bekannt	
	c	r : sin. C = a : c	
c, a	C	a : c = r : sin. C	sin. C = $\frac{c}{a}$ = cos. B.
	B	itzt bekannt	
	b	r : sin. B = a : b	
c, B	C	für sich bekannt.	a = $\frac{c}{\text{cos. B}}$ = c. sec. B. n. 26.
	b	r : tang. B = c : b	b = c. tang. B.
	a	sin. C : r = c : a	
b, C	B	B = 90° — C	a = $\frac{b}{\text{cos.C}}$ = b sec. C
	a	sin. B : r = b : a	c = b tang. C.
	c	. . .	
a, C	B	. . . .	c = a. sin. C
	c	r : sin. C = a : c	b = a. cos. C.
	b	r : cos. C = a : b	
a, B	C	C = 90° — B	c = a. cos. B
	c	r : sin. C = a : c	b = a. sin. B.
	b	r : sin. B = a : b	
b, B	C	. .	a = $\frac{b}{\text{sin. B}}$ = b. cosec. B n. 29.
	a	sin. B : r. = b : a	c = b. cot. B.
	c	r : tang. C = b : c	
c, C	B	B = 90° — C	a = $\frac{c}{\text{sin. C}}$ = c. cosec. C
	a	sin. C : r = c : a	b = c. cot. C.
	b	r : tang. B = c : b	

Wo nämlich A den rechten Winkel, B, C die beyden Spitzen W. und a, b, c die resp. entgegenstehenden Seiten bezeichnen.

Anmerk. Ich habe bey der Auflösung durch Proportionen mit Fleiße Sek. und Cosek. aus dem Spiele gelassen, weil man doch immer, wenn man nicht größere Tabellen zur Hand hat, genöthigt ist, ihren Werth nach oben §. 32 Zus. 2. angegebener Art zu substituiren.

Es ist übrigens schon aus der Erklärung der trigonometrischen Linien klar, daß, so wie z. B. b der Sin. B. oder cos. C ist, auch c die Tang. C oder Cot. B u. s. w. im bestimmten Falle sey.

Daß mehrere Fälle auch nach dem berühmten Lehrsatze des Pythagoras ihre Auflösung finden, bedarf nur bemerkt zu werden.

Zusatz. Aus dieser Resolutionsart rechtwinklichter Dreyecke resultirt die für gleichschenklichte wie von selbst. Denn man darf sich nur im gleichschenklichten Dreyecke BCD (Fig. 1.) das Loth. BE auf die Grundlinie CD gefällt denken, so hat man z. B. BD : DE = r : sin. $\frac{1}{2}$ B, also sin. $\frac{1}{2}$ B

$= \frac{r \cdot \frac{1}{2}CD}{BD}$, oder $BD = \frac{r \cdot \frac{1}{2}CD}{\sin. \frac{1}{2} B}$ u. s. w.

Hiernach ist denn, wenn b die Grundseite, B den ihr gegenüberliegenden Winkel, a jeden Schenkel, und A jeden Winkel an der Basis bezeichnet, folgende, die zur Berechnung gleichschenklichter Dreyecke

ecke nöthigen Formeln enthaltende Tabelle verständlich.

Gegeben	gesucht	Auflösung.
a, b	B	$\sin.\frac{1}{2}B = \frac{r.\frac{1}{2}b}{a}$
	A	$= \text{cos.}\ A$
b, B	a	$a = \frac{r.\frac{1}{2}b}{\sin.\frac{1}{2}B}$
	A	$A = 90° - \frac{1}{2}B$
B, a	A	$A = 90° - \frac{1}{2}B$
	b	$b = r.2a.\sin.\frac{1}{2}B$

Beyspiel I. Es sey die Höhe z. B. eines Thurmes zu finden, wenn man eine horizontale Standlinie bis an desselben Fuß nehmen kann. Tab. II. Fig. 14.

Es stelle AB diese Höhe vor, und BD sey die gemessene Standlinie. In D stelle man nun z. B. ein Astrolabium *) so auf, daß das Loth. die vertikale

*) Das gemeine Astrolabium ist ein ganzer oder halber metallener Kreis, in 360 oder 180 Grade, und jeder Grad wieder in 60 Minuten eingetheilt. Die Grade sind doppelt herumgeschrieben, so daß, wo z. B. der 160te Grad steht, eben daselbst auch der 20te steht; damit

tikale Linie ED bildet, und indem das Instrument nach A und C gerichtet wird, bemerke man den auf dem Instrumente angegebenen Winkel AEC; weil nun auch EC = DB: so ist

r: tang. AEC = CE : AC.

Addirt man noch zum gefundenen AC die Höhe des Instruments ED = CB: so hat man die gesuchte Thurmhöhe.

Der so gefundene Winkel AEC sey = 51° 45′ 10″ und DB = EC = 124 Schuhen. Die Rechnung mit Logarithmen nach der Gleichung log. AC = log. tang. AEC + log. CE — log. r steht nun so:

log. tang. 51° 45′ 0″ = 10,1032884

wegen 10″ + 434

10,1033318

+ log. 124 = 2,0934217

— log. r = —10, . .

log. AC = 2,1967535

Folg-

damit man auf allen Seiten, ohne beschwerliches Reduziren, spitze und stumpfe Winkel finden kann. Auf der Scheibe befinden sich 2 Diopter-Liniale, ein bewegliches und ein unbewegliches. In der Mitte des beweglichen befindet sich gewöhnlich eine kleine Boussole, wodurch man sich beym Gebrauche orientiren kann.

Nähere Beschreibung dieses heut zu Tage so sehr vervollkommneten Instrumentes liefert jedes der bessern Bücher über praktische Geometrie z. B. Mayers prakt. Geom. neueste Aufl.

Folglich AC = 157,31 Schuhen beynahe.

Wäre daher DE = 4′, so hätte man AB, oder die Thurmhöhe = 161,31 Schuhen.

Man muß hiebey bemerken, daß man wegen des Umstandes, weil vermöge der Refraktion der Lichtstrahlen jener Punkt A um weniges höher gesehen wird, als er wirklich ist, man lieber die Höhe um weniges geringer, als größer annehmen müsse. — Eben so versteht sich von selbst, daß, wenn z. B. A die Thurmspitze, folglich AB die durch seine Mitte gehende vertikale Linie bezeichnet, man zu der bis an den Fuß des Thurmes gemessenen Standlinie De noch eB, d. i. die halbe Thurmdicke, addiren müsse, um die wahre Linie BD oder CE zu haben.

Beyspiel II. Gesetzt, man sey nach der geraden und mit der Nord Nord Ost bezeichnenden Linie GF parallelen Richtung vom Orte A nach B 32 Meilen fortgegangen; man verlangt nun zu wissen, wie weit man gegen Ost und gegen Nord gekommen sey? Fig. 15

Denkt man sich eine Linie CB durch B mit der West und Ost — und eine andre AC durch A mit der Nord und Süd bezeichnenden Linie parallel gezogen: so hat man ein in C rechtwinklichtes Dreyeck, worin nebst dem rechten Winkel und der Seite AB der Winkel BAC aus dem gleichen Winkel NDF, welcher nach der Eintheilung der Windrose = 22° 30′ d. i. dem 4ten Theile des Qua-

dran-

dranten, bekannt ist. Folglich ist B = 67° 30′.
Hieraus findet man

1) BC aus r : sin. BAC = AB : BC, d. i.

log. BC = log. sin. 22° 30′ + log. 32′ — log. r.

2) AC aus r : sin. B = AB : AC, d. i.

log. AC = log. sin. 67° 30′ + log. 32′ — log. r.

Die Rechnung steht so:

a) log. sin. 22° 30′ = 9,5828397
+ log. 32 = 1,5051500
— log. r = — 10,.....
log. BC = 1,0879897, woraus BC = 12, 25, oder so viel Meilen kam man gegen Osten.

b) log. sin. 67° 30′ = 9,9656153
+ log. 32′ = 1,5051500
— log. r = — 10,.....
log. AC = 1,4707653, woraus AC = 29, 56, oder so viel Meilen war man gegen Norden fortgegangen.

Aus diesem Beyspiele wird begreiflich, wie man den Ort B eines Schiffes, das immer in derselben Richtung fortsegelte, gegen andere Orte auf der Erde bestimmen könne.

Zugleich erhellt, daß, wenn man wüßte, wie weit man, während das Schiff von A nach B segelte,

gelte, nach Norden zu gekommen sey, aus dem nun bekannten AB und AC der Winkel B, folglich auch der W. A, d. i. die bestimmte Richtung der Route, oder welchem Winde das Schiff folgte, gefunden werde.

Eben so könnte man drittens, wenn man wüßte, wie weit man nach Norden und Osten fortgesegelt sey, die Länge und Richtung des Weges finden, indem man aus den nun bekannten Katheten die Winkel und die Hypotenuse finden kann.

Der ebenen Trigonometrie

Zweyter Abschnitt.

von

der Auflösung schiefwinklichter geradliniger Dreyecke.

---

§. 62.

Es können hier erstens folgende zwey Fälle vorkommen:

Aufg. a) Aus zwey gegebenen Winkeln und einer Seite;

b) aus zwey gegebenen Seiten und einem Winkel, welcher einer dieser Seiten entgegensteht, die übrigen Stücke zu finden.

Aufl. 1. Wenn a, b, c wieder die 3 Seiten des Dreyeckes, und A, B, C die 3 Winkel bezeichnen: so nimmt man immer aus

$$a : b : c = \sin. A : \sin. B : \sin. C$$

diejenige Proportion, worin im bestimmten Falle die 3 ersten Glieder gegeben sind, und das 4te das Gesuchte ist.

Der Beweis ist oben §. 4 gegeben.

Fig. 16 **Beyspiel I. über a)** Man soll den Abstand des Ortes B, wo man sich befindet, vom Gegenstande A, der von B z. B. durch einen Fluß getrennt ist, so, daß man nicht unmittelbar von B zu A messen kann, finden.

Man messe die Standlinie BC, die dem Augenmaaße nach nicht viel kleiner ist, als der Abstand des Ortes B von A; messe dann die Winkel B und C (mittels des Astrolabiums z. B.), welche von den eingebildeten oder Seh-Linien AB und AC mit der gemessenen BC gebildet werden: so hat man eben dadurch den 3ten Winkel A; AB aber findet man aus der Proportion:

$$\sin. A : \sin. C = BC : AB$$

oder $\log. AB = \log. \sin. C + \log. BC - \log. \sin. A.$

Hat man daher $B = 71° 28'$, $C = 63° 56'$ und BC $= 165'$ gefunden, so ist $A = 44° 36'$ folglich

log.

log. sin. $63° 56'$ = 9,9534134

✠ log. 165′ = 2,4232459

✠ arithm. Erg. log. sin. $44° 36'$ = 0,1535682

log. AB = x2,5302275

Also AB = 339′,024.

Beyspiel II. über b). Es sey AB = 71′, Fig. I. BC = 65′, A = $51° 54'$, man sucht C. Diesen finden wir aus der Proportion

$$BC : AB = \sin. A : \sin. C;$$

folglich $\sin. C = \frac{AB}{BC} . \sin. A$, oder mittels der Rechnung mit Logarithmen.

log. 71′ = 1,8512583

log. sin. $51° 54'$ = 9,8959389

✠ arithm. Erg. log. 65′ = 8,1870866

log. sin. C = x9,9342838

Woraus $C = 59° 16'$ beynahe; oder nach §. 2 der Einleitung $C = 120° 44'$, wo ABD die bestimmte Figur des Dreyecks seyn würde. Hiernach erkennte man dann weiter die Größe des Winkels

B = ABD oder = ABC. AD aber oder AC wird endlich nach einer der obigen Analogien gefunden. Wie man diese 3te Seite des Dreyeckes in ihrer Zweydeutigkeit aus den gegebenen Stücken finde, werde ich weiter unten noch nach einer andern analytischen Formel zeigen.

2) Analytische Auflösung mittels der trigonometrischen Formeln.

In $\sin. C = \frac{AB}{BC}. \sin. A$ setze man $\frac{AB}{BC} = a$;

so ist $\cos. C = \pm V (1 - a^2 \sin. A^2)$. n. 9. Ferner $\sin. B = (180 - (A \pm C))$, folglich $\sin. B = \sin. (A \pm C)$ §. 6. $= \sin. A. \cos. C \pm \cos. A. \sin. C$. n. 57; durch Substitution also ist $\sin. B = \sin. A \pm V (1 - a^2 \sin. A^2) \pm a \sin. A. \cos. A$. Mit B und A hat man auch C, und so fort die dritte Seite.

Behalten wir unser voriges Beyspiel, und suchen nach dieser Formel den Winkel B: so finden wir, wenn wir alles bis auf 4 oder 5 Dezimalstellen berechnen:

$a = 1{,}0923$; $\sin. A = 0{,}7869$

$a^2 (= 1{,}1931)$; $\sin. A^2 = 0{,}6192$

Also $a^2 . \sin. A^2 (= \times 0{,}6192)$

$= 0{,}73876752$

$(1 - a^2 \sin. A^2) = 0{,}26123248$

$\pm V$

$$\text{fin. A}^2 \times \begin{cases} = 0,5111 \\ = 0,7869 \end{cases}$$

$$\sqrt{(1 - a^2 \text{ fin. A}^2} \times$$

$$= 0,4021845 = \text{R.}$$

$$\text{fin. A} \times \begin{cases} = 0,7869.. \\ = 0,6170.. \end{cases}$$

$$\text{cof. A} \times$$

$$= 0,4855173$$

$$\times a \quad = 1,0923...$$

$$= 0,5303116.. = \text{S.}$$

folglich fin. B $= 0,9324962$, woraus man vorerst $B = 68° 49'$, und dann, wenn man mit der zwischen dem nächst größeren Sinus herrschenden Differenz 17, 52 den Unterschied zwischen dem gefundenen und nächst kleineren natürlichen Sinus der Tafel, nämlich 673 dividirt, $B = 68° 49' 38''$ findet.

Nach dem vorigen Beyspiele, wenn man Cspitz nimmt, findet man $B = 68° 50^1$, folglich nur um einige Secunden größer als nach der analyt. Formel, welches aber zum Theile von der Vernachläßigung der Sek. in C und der vielen Dezimalen im letzteren Beysp. herrührt.

Hätte man in der Berechnung dieses Beyspieles in der Formel $-\sqrt{(1 - a^2 \text{ fin. A}^2)}$ gesetzt: so wäre fin. $B = -R + S = 0,1281271$, folglich der W. $B = 7° 21' 40'',9$ gefunden worden.

Zusatz. Wäre das Dreyeck gleichschenklicht, wie Fig. 1. BCD: so machte es keinen Unterschied, ob der, einem der bekannten Schenkel gegenüberliegende, oder der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben wäre. Denn für den ersten Fall hätte man, weil $D = C$, $B = 180° - 2D$; und im zweyten Falle $D = \frac{1}{2}(180° - B)$. Da nun DC durch BE halbirt, DE aber aus der Proportion: sin. tot.: sin. $\frac{1}{2}B = BD$: DE gefunden wird: so hat man auch die Grundseite DC.

§. 63.

Zweytens kann der Fall vorkommen, welchen die Aufg. „Aus zwey mit dem zwischenliegenden Winkel gegebenen Seiten die übrigen Stücke zu finden" ausdrückt.

Fig. 17. Aufl. 1. Es seyen im Dreyecke ACD AC, AD und der Winkel A bekannt. Um nun CD zu finden, setze man die Proportion:

$AC + AD : AD - AC = \text{tang}\frac{1}{2}(C + D) : \text{tang}.\frac{1}{2}(C - D)$.

Hieraus findet man also den halben Unterschied der beyden Winkel; diesen zur halben Summe hinzugethan oder von derselben abgezogen, giebt den größeren oder kleineren Winkel, C oder D. Weiß man aber diesen: so findet man nach §. 62 die Seite. DC.

Beweis. Es ist

$AC : \text{sin}.D = AD : \text{sin}.C$. §. 62.

$AC + AD : \text{sin}.D + \text{sin}.C = AD : \text{sin}.C$.

$AD - AC : \text{sin}.C - \text{sin}.D = AD : \text{sin}.C$.

(nach algebr. Grundsätzen) Also

Also

$AC \dotplus AD : AD - AC = \sin.C \dotplus \sin.D : \sin.C - \sin.D.$

Es ist aber nach §. 29 oder nach n. 92 der Formeln

$\text{Sin.}\, C \dotplus \sin.D : \sin.C - \sin.D = \text{tang.}\frac{1}{2}(C \dotplus D) : \text{tang.}\frac{1}{2}(C - D).$

Folglich auch

$AC \dotplus AD : AD - AC = \text{tang.}\frac{1}{2}(C \dotplus D) : \text{tang}\,\frac{1}{2}(C - D).$

2) Wenn x und y die zwey unbekannten Theile eines Ganzen, und x den größeren Theil bezeichnet: so findet man aus $x \dotplus y = s$ und $x - y = d$, $x = \frac{1}{2}(s \dotplus d)$, und $y = \frac{1}{2}(s - d)$.

Beyspiel. Man stehe in A, von den Gegenständen C und D, deren Abstand von einander verlangt wird, z. B. durch einen Strom getrennt.

Man messe eine schickliche Standlinie AB, und bey A z. B. mit dem Astrolabium die Winkel CAB, DAB, eben so bey B die W. DBA, CBA. Nun ist im Dreyecke ABD AB mit den Winkeln DAB, DBA bekannt: folglich findet man nach §. 62 die Linie AD. Auf dieselbe Weise wird im Dreyecke ACB die Seite AC gefunden. Man weiß daher itzt im Dreyecke ACD 2 Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel $CAD = CAB - DAB$.

Es sey z. B. auf diese Art gefunden worden

$CAD = 35^\circ\ 41'\ 18''$

$AC = 120'$

$AD = 140'$. Demnach ist

$AC + AD = 260'$

$AD - AC = 20'$

$C + D = 144° 18' 42''$

$C - D = d = x.$

Nach der obigen Proportion und mittels Logar. steht daher die Rechnung so:

$\log. 20' = 1{,}3010300$

$+ \log. 72° 9' 21'' = 10{,}4922583$

$+ \text{arithm. Erg. vom } \log. 260' = \underline{7{,}5850267}$

$\log. \text{tang.} \frac{1}{2} d = x\,9{,}3783150.$

Also $\frac{1}{2} d = 13° 26' 20''$. Folglich

$D (< C) = 72° 9' 21'' - 13° 26' 20''$

$= 58° 43' 1''$

und $C = \frac{1}{2}(s + d) = 85° 35' 41''$.

Endlich findet man mittels der Analogie

$\sin. 58° 43' 1'' : \sin. 35° 41' 18'' = 120' : CD,$

$CD = 81{,}914$ beynahe.

2. Analytische Auflösung. Es sey die gegebene Seite $AC = a$, $AD = b$, die gesuchte $CD = c$, der gegebene zwischenliegende Winkel $= \alpha$. Man fälle aus C das Perpendikel CE; so erhält man 1) im rechtwinklichten Dreyecke ACE nach §. 61.

$a : CE = 1 : \sin. \alpha$

$a : AE = 1 : \cos. \alpha;$

folg-

folglich $CE = a \cdot \sin. \alpha$ und $AE = a \cdot \cos. \alpha$, mithin

$$DE = AD - AE = b - a \cdot \cos. \alpha .$$

2) Im rechtw. Dreyecke CED ist

$$DE : CE = 1 : \text{tang.}\, \beta \text{ (§. 61).}$$

folglich $\text{tang.}\, \beta = \frac{CE}{DE} = \frac{a \cdot \sin. \alpha}{b - a \cdot \cos. \alpha}$, oder $\cot. \beta$

$$= \frac{b - a \cdot \cos. \alpha}{a \cdot \sin. \alpha} \text{ n. 20} = \frac{b}{a \cdot \sin. \alpha} - \frac{a \cdot \cos. \alpha}{a \cdot \sin. \alpha} = \frac{b}{a \cdot \sin. \alpha}$$

$- \cot. \alpha$, n. 21.

Nun ist vorerst $\frac{b}{a \cdot \sin. \alpha}$ nach §. 33, Zus. 1.

$$= \frac{r\,b}{a \cdot \sin. \text{tab.}\, \alpha} \text{ und mit Logarithmen} = (10 + \log. 140)$$

$- \log. (120' + \log. \sin. \text{tab.}\, 35° 41' 18'')$

d. i.

$$\begin{array}{r} 10,\ldots \\ + \ 2,1461280 \\ \hline 12,1461280 = R \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log. 120' = & 2,0791812 \\ + \log. 35° 41' 18'' = & 9,7659485 \\ \hline & 11,8451297 = S \end{array}$$

$$R - S = 0,3009983 = \log \frac{r \cdot b}{a \cdot \sin. \text{tab.}\, \alpha}$$

folglich $\frac{b}{a \cdot \sin. \alpha} = 1,9998530$.

Weil nun der Ausdruck für cot. β unter Voraussetzung des Halbm. $=$ 1 berechnet ist: so ziehe man nun von 1,99... die für derselben Halbmesser in Schulzens oder Vega's Tafeln berechnete Cot. α $=$ 1,3922454 ab. Die so erhaltene Differenz ist $=$ 0,6076086. Dieser Cot. entspricht aus denselben Tafeln für die nächst kleinere 0,6072130 der Winkel von 58° 44′. Dividire ich nun den Unterschied $=$ 3956 mit der dort herrschenden Diff. 1″ d. i. mit 66, 37 wie oben §. 62: so erhalte ich etwas mehr als 59″. Weil nun diese, indem die Cotangente bey wachsendem Winkel abnimmt, abgezogen werden müssen: so wird β oder D gerade so, wie nach der vorigen Auflösung gefunden.

Zusatz. Wäre α um φ größer als 90°: so

würde $\cot.\alpha = \cot.(90° + \varphi) = \frac{1}{\text{tang.}(90° + \varphi)}$

$$= \frac{1}{-\text{tang.}(90° - \varphi)} = \frac{1}{-\cot.\varphi}$$

$$= -\text{tang.}\varphi \text{ (n. 17, 18).}$$

Und weil dann auch $\text{sin.}(90 + \varphi) = \text{sin.}(90° - \varphi) = \text{cos.}\varphi$: so würde $\cot.\beta = \frac{b}{a.\text{cos.}\varphi + \text{tang.}\varphi}$.

§. 64.

§. 64.

B. Hätte man die Cotangenten vermeiden wollen: so hätte die Auflösung bey 2. §. 63. auch so fortschreiten können:=

Es ist im rechtw. Dreyecke DCE

$c^2 = CE^2 + DE^2$

$= a^2 . \sin. \alpha^2 + (b - a . \cos. A)^2$

$= a^2 (\sin. \alpha + \cos. \alpha) + b^2 - 2ab . \cos. \alpha$

$= a^2 + b^2 - 2ab . \cos. \alpha$ n. 118.

Also $c = \sqrt{(\alpha^2 + b^2 - 2ab . \cos. \alpha)}$.

Wählt man auch hier wieder, wo die Logarithmen nicht anwendbar sind, für $\cos. \alpha$ den Cosinus für den Halbm. = 1 aus Vega's 3ter Tafel: so wird die nicht verwickelte Rechnung äußerst leicht.

Es sey z. B. $a = 218$ Fuß, $b = 646$ Fuß

$\alpha = 171° 9' 19'', 5$.

Man hat a^2	= 47524	$2ab$ =	281656
b^2	= 417316	$\cos. \alpha$ = −	0,9877439
$a^2 + b^2$	= 464840	$2ab . \cos \alpha$ =	278203,9958984

Lassen wir die Bruchtheile bey Erhöhung der letzten ganzen Ziffer um 1 weg: so ist

$a^2 + b^2 - 2ab . \cos. \alpha$ = 464840 − 278204

$\sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab . \cos. \alpha)} = \sqrt{743044} = 862$ Fuß $= c$.

Zusatz 1. Wenn der gegebene Winkel α sehr klein ist; so kann man den Sinus des Winkels für

diesen selbst nehmen, indem der Sinus eines sehr kleinen Bogens als mit diesem zusammenfallend betrachtet werden kann. Dem zu Folge ist cos. α $= \sqrt{(1 - \sin.\alpha^2)}$ n. 9. $= \sqrt{(1 - \alpha^2)}$. Hieraus die Wurzel ausgezogen, erhält man eine unendliche Reihe, derer ersten Glieder sind $1 - \frac{1}{2}\alpha^2$. Nimmt man auch nur den Werth dieser 2 ersten Glieder *) für cos. α: so kömmt man doch der Wahrheit viel näher, als jene, welche in unserem Falle cos. $\alpha = 1$ setzen, da doch nach §. 18 dieser Werth nur, wenn $\alpha = 0$, gelten kann. Es ist,

folglich nun tang. $\beta = \frac{a \cdot \alpha}{b - a + \frac{1}{2}\alpha^2}$.

Man sieht, daß hier $+ \frac{1}{2}\alpha^2$ nur dann könne vernachläßigt werden, wenn die Seite b viel größer als a, und folglich $\frac{1}{2}x^2$ gegen die Differenz b—a sehr klein ist.

Zusatz 2. Um die Formel $c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab . \cos.\alpha)}$ für die Rechnung geschmeidiger zu machen, substituire man statt cos. α $1 - 2 \sin.\frac{1}{2}\alpha^2$. n. 115. wodurch, wenn $a > b$, $c = \sqrt{[(a-b)^2 + 4ab . \sin.\frac{1}{2}\alpha^2]}$

$$\text{oder } c = (a-b) . \sqrt{\left[1 + \frac{4ab . \sin.\frac{1}{2}\alpha^2}{(a-b)^2}\right]}.$$

Die

*) Derselbe Werth, welchen man mittels der Infinitesimalrechnung findet.

Die Größe unter dem Wurzelzeichen $V(1 + \text{tang.}\alpha'^2)$ gleich gesetzt, wird folglich 1) $\text{tang.}\alpha' = \frac{2\,\text{sin.}\frac{1}{2}\alpha}{a-b}$. $V\,ab$. Weiß man so α': so hat man auch c mittels der Gleichung. 2) $c = \frac{a-b}{\text{cos.}\alpha'}$. n. 12.

Zusatz 3. Sollte man nun einen der übrigen Winkel finden; so könnte man dem vorigen §. gemäß verfahren, oder die Aufgabe, wie die gleichfolgende, behandeln. Ohne die dritte Seite gefunden zu haben, kann man auch noch so die Aufgabe unmittelbar lösen:

Im Dreyecke ABC (Fig. 18) seyn AC, BA mit dem W. A gegeben; man sucht B.

Man fälle aus des dritten Winkels C Spitze das loth CD; so ist $\text{tang.}B = \frac{CD}{BD}$ n. 16 vergl. mit §. 15. Nun ist $CD = AC.\text{sin.}A$; $AD = AC.\text{cos.}A$; $AB - AD = BD = AB - AC.\text{cos.}A$, folglich ist $\text{tang.}B = \frac{AC\,\text{sin.}A}{AB - AC.\text{cos.}A}$.

Eben so findet man $\text{tang.}C = \frac{AB.\text{sin.}A}{AC - AB.\text{cos.}A}$.

§. 65.

C. Sind nicht unmittelbar die 3 Seiten, sondern ihre Logarithmen gegeben: so thut man besser, wenn man, da aus den Logarithmen erst die Seiten gesucht werden müssen, jener Proportion der ersten Auflösung eine andere substituirt, was auf doppelte Art geschehen kann:

1. Es gelte die vorige Bezeichnung der Seiten, so ist

$$b + a : b - a = \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(C + D) : \text{tang.}\ \tfrac{1}{2}(C - D)$$

oder dafür $1 + \frac{a}{b} : 1 - \frac{a}{b} = \text{tang.}\ \frac{1}{2}(C + D) : \text{tang.}\ \frac{1}{2}(C - D)$.

Nimmt man nun an, daß in der 138 Formel $\cos. 2\alpha = \frac{a}{b}$ sey: so haben wir, weil dort

$\text{tang.}\alpha^2 . (1 + \cos.2\alpha) = 1 - \cos. 2\alpha$, oder $1 : \text{tang.}\alpha^2 = 1 + \cos. 2\alpha : 1 - \cos. 2\alpha$,

$1 : \text{tang.}\alpha^2 = \text{tang.}\ \frac{1}{2}(C + D) : \text{tang.}\ \frac{1}{2}(C - D)$;

folgl. $2 \log. \text{tang.}\alpha + \log. \text{tang.}\ \frac{1}{2}(C + D) = \log. \text{tang.}\ \frac{1}{2}(C - D)$.

Man suche nun den Winkel, dessen Cosinus ist $= \frac{a}{b}$, was wegen ihrer gegebenen Logarithmen leicht ist. Die Hälfte dieses Winkels ist dann α.

Dem-

Demnach findet man aus dem ersten Gliede der Gleichung den Werth für log. tang. $\frac{1}{2}$ (C—D).

2) Oder nennt man tang. β aus der 133ten Form. $\frac{a}{b}$: so hat man

1 : tang. $(45° - \beta) =$ tang. $\frac{1}{2}$ (C + D) : tang. $\frac{1}{2}$ (C — D); oder log. tang. $(45° - \beta)$ + log. tang. $\frac{1}{2}$ (C + D). $=$ log. tang. $\frac{1}{2}$ (C—D).

Beyſp. I. Es ſey der gegebene Log. a $=$ 2,0791812

log. b $=$ 2,1461280

daher log. $\frac{a}{b}$ $=$ 9,9330532

Dieſe Zahl, welche nur dadurch erhalten werden konnte, daß man zum log. des Zählers 10, oder den Log. des Halbmeſſers der gemeinen Tafeln addirte, iſt in eben dieſen der log. cof. 31° 0′ 10″; daher α nach der Vorausſetzung $=$ 15° 30′ 5″.

Da nun, wie oben, der eingeſchloſſene Winkel A auch hier $=$ 35° 41′ 18″ und folglich $\frac{1}{2}$ (C + D) $=$ 72° 9′ 21″ ſeyn ſoll: ſo giebt die Rechnung ferner:

2. log. tang. α $=$ 9,4430292

× 2

$=$ 8,8860584

+ log. tang. $\frac{1}{2}$ (C + D) $=$ 10,4922583

daher log. tang. $\frac{1}{2}$ (C—D) $=$ 9,3783167.

Hier-

Hieraus hat man $\frac{1}{2}$ (C—D) = 13° 26′ 20″,9 folglich genau die halbe Differenz der 2 übrigen Winkel wie im obigen Beyspiele, dem gemäß auch alles Uebrige weiter berechnet wird.

Beyspiel II. Es bleibe das Gegebene, wie in Beyspiel I. Nun ist log. $\frac{a}{b}$ = log. tang. β (nach der Voraussetzung) = 9,9330532 (wie vorher gefunden) = log. tang. 40° 36′ 4″. Diesen Winkel von 45° oder 44° 59′ 60″ abgezogen, hat man 4° 23′ 56″.

Demnach log. tang. 4° 23′ 56″ = 8,8860748

\+ log. tang. 72° 9′ 21″ = 10,4922583

log. tang. $\frac{1}{2}$ (C—D) = 9,3783331

folglich $\frac{C-D}{2}$ = 13° 26′ 22″.

§. 66.

Den dritten Fall zeigt die Aufg. Aus drey gegebenen Seiten die Winkel zu finden.

Anm. Auch hierüber hat man mehrere Auflösungen erfunden, um die Schwierigkeiten, welche bey der Rechnung eintreten können, so viel als möglich zu beseitigen, und so die Rechnung selbst

desto sicherer zu machen. Ich setze hier zuerst die-
jenige Auflösung, welche sich auf Grundsätze der
Geometrie stützt, nicht weniger sinnreich, als die
übrigen, ist, und in den Lehrbüchern der Mathe-
matik gewöhnlich angeführt wird.

Aufl. 1. Fällt man im Dreyecke ABC das Fig.
Perpendikel CD: so erhält man 2 rechtwinklichte 18.
Dreyecke, in welchen immer eine gegebene Seite
des Dreyeckes ABC nebst dem rechten Winkel be-
kannt ist. Könnte man nun noch sowohl das eine
als das andere Segment AD, BD finden: so hätte
man 3 Stücke in jedem rechtwinklichten Dreyecke
bekannt, woraus dann nach §. 61 die Winkel des
Dreyeckes ABC gefunden werden könnten. Das
Auflösen dieser Aufgabe reduzirt sich demnach auf
das Finden jener Segmenten. Dieses geschieht
aber nach der Proportion:

$$AB : AC + CB = AC - CB : AD \mp BD;$$

da hier, wie man sieht, das 4te Glied allein das
unbekannte ist: so findet man aus dieser Proportion
die Differenz oder die Summe der Segmente, je
nachdem das Loth entweder innerhalb oder außer-
halb des Dreyeckes ABC fällt. Nun ist, wenn
das Perpendikel hinein fällt, die Seite, worauf
dasselbe gezogen ist, die Summe der Segmente,
wie in Fig. I. $AB = AD + DB$; und wenn es hin-
aus fällt, wie in Fig. II: ist die Seite, deren Ver-
längerung das Loth trift, der Unterschied der Seg-

menten

mente; so ist hier AB = AD — DB. Man muß folglich für Fig. I zur halben Summe AB die Hälfte des gefundenen Unterschiedes, und für Fig. II zur halben Seite AB die Hälfte der gefundenen Summe der Segmente addiren, um das größere Segment zu haben. Wie man den kleinern Theil findet, führte ich, wie voriges, schon im §. 63 an.

Für die Richtigkeit der gesetzten Analogie, die in dem

Lehrsatze „In jedem geradlinigten Dreyecke verhält sich die Seite, auf welche oder auf deren Verlängerung das vom gegenüberliegenden Winkel gezogene Perpendikel fällt, zur Summe der beyden übrigen Seiten, wie ihr Unterschied zum Unterschiede oder zur Summe der Segmente, je nachdem das Loth innerhalb oder außerhalb des Dreyeckes fällt"

ausgedrückt zu werden pflegt, steht folgender kurze

Beweis. Man beschreibe aus C als aus dem Mittelpunkte mit dem Halbmesser = BC Kreise um die Dreyecke ABC. Zieht man nun AC bis E, und für Fig. II auch AD bis F fort: so hat man für beyde Figg. sich außerhalb des Kreises schneidende Sekanten AB, AE, welche im umgekehrten Verhältnisse sind zu ihren außerhalb des Kreises liegenden Theilen.

Denn

Denn zieht man die 2 Sehnen GB und EF, so erhält man zwey ähnliche Dreyecke AEF und ABG, indem A gemeinschaftlich, der Winkel E = der W. B ist, u. s. w. folglich ist

$$AB : AE = AG : AF.$$

AE aber $= AC + CE$
$= AC + CB$
AG $= AC - GC$
$= AC - CB$

Also ist $AB : AC + CB = AC - CB :$
$AD - DB$, für Fig. I.

Für Fig. II ist eben so: $AB : AG = AE : AF$ oder durch

Alterniren $AB : AE = AG : AF.$

AF aber $= AD + DF$
$= AD + BD$

Also ist hier $AB : AC + CB = AC - CB :$
$AD + BD.$

Beyspiel. Es seyn die Seiten irgend eines Dreyeckes (nach Fig. I) ABC AB = 184, AC = 142, BC = 64 gegeben oder gefunden, und das auf AB gezogene Perpendikel mache die 2 Abschnitte S, s indem es in das Dreyeck hinein fällt. Man setze nun

$$184 : 142 + 64 = 142 - 64 : S - s$$

d. i. $184 : 206 = 78 : S - s$

woraus $S - s = \frac{16068}{184} = 87,326.$

Also $s = \frac{184' - 87,326'}{2} = 48,337, = BD.$

Nun ist BC : BD = r : sin. BCD (§. 61.)

oder log. BD = 1,6842797

log. r. = 10, . . .

+ arithm. Erg. log. BC = 8,1938200

log. sin. BCD = 9,8780997

folglich BCD = 49° 2′ 54″; und der W. CBD als die Ergänzung zu 90° ist = 40° 57′ 6″ = CBA. Nach Fig. II aber ist des Winkels CBD Ergänzung zu 180° = CBA.

Das größere Segment $S = \frac{184' + 87,326'}{2} =$

135, 663′ = AD.

Nun ist AC : AD = r : sin. ACD

oder log. AD = 2,1324615

log. r = 10,....

+ arithm. Erg. log. AC = 7,8477117

log. sin. ACD = 9,9801732

Diesem entspricht der Winkel ACD = 72° 49′; folglich CAD = 17° 11′ = CAB, und der dritte Winkel ACB = 2 R — (CBA + CAB) = 121° 51′ 54″.

Zusatz. Ungeachtet die Proportion, als das Prinzip dieser Auflösung, allgemein gilt: so sieht man

man doch leicht ein, daß sie ihre volle Anwendung doch nur bey der Resolution ungleichseitiger Dreyecke findet.

Denn im rechtwinklichten Dreyecke können schon aus zwey gegebenen Seiten die Winkel gefunden werden; im gleichseitigen sind eben dadurch die Winkel bekannt, und im gleichschenklichten weiß man, 1) daß die Winkel an der Grundseite einander gleich sind, und daß, wenn A den Winkel an der Spitze bedeutet, jeder Winkel an der Grundseite $= 90° - \frac{1}{2}A$ ist; 2) ist durch die gegebenen Seiten der Sinus des halben Winkels an der Spitze bestimmt, folglich der ganze Winkel als gegeben anzusehen.

Denn zieht man im gleichschenklichten Dreyecke BDC aus B das Perpendikel BE auf die Grundseite DC: so ist Fig. 1

$$BD : \tfrac{1}{2}DC = \text{sin. DEB} : \text{sin. DBE}$$

d. i. $BD : \frac{1}{2}DC = 1 : \text{sin.}\ \frac{1}{2}DBC$, folglich

$$\text{sin.}\ \tfrac{1}{2}DBC = \frac{DC}{2BD}.$$

§. 67.

Aufl. 2 Um die Segmente zu finden, ist öfters folgende Methode vorzuziehen. Fig. 18.

Es ist nämlich, wenn das Loth in das Dreyeck hineingezogen wird,

$$R^2 \qquad CD^2$$

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$$

aber $BD^2 = AB^2 - 2AB \cdot AD + AD^2$

also $AC^2 - AD^2 = BC^2 - AB^2 + 2AB\,AD - AD^2$.

Hieraus ist $$AD = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AB}$$

Auf gleiche Art findet man

$$BD = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB}.$$

§. 68.

Aufl. 3. Sehr bequem ist auch die Berechnungsart der Winkel aus den drey gegebenen Seiten eines ungleichseitigen Dreyeckes, als worauf unsere Aufgabe eigentlich beschränkt werden sollte §. 66. Zus., mittels des gefundenen, blos durch die 3 gegebenen Seiten bestimmten Inhaltes des Dreyeckes.

Diese Auflösung giebt folgender

Lehrsatz: „Der Sinus eines jeden Winkels eines ungleichseitigen Dreyeckes verhält sich zum Sinus totus; wie der Flächeninhalt des Dreyeckes, oder wie die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen zwey Rechtecken, deren Seiten sind der halbe Umfang des Dreyeckes und die Ueberschüsse eben dieses halben Umfanges über jede der drey Seiten

en des Dreyeckes, zu der Hälfte des Rechteckes aus den Seiten um die Winkel."

Beweis. a) Es sey ABC das Dreyeck, dess- Fig. en Seiten AC, AB, BC gegeben sind. Man 19 halbire B und A, und ziehe aus O, wo sich die halbirenden Linien AO, BO schneiden, Perpendikel auf die Seiten; der mit einem dieser Perpendikel als Halbmesser aus O gezogene Kreis ist nun ein in das Dreyeck ABC beschriebener Kreis, und sein Halbmesser die gleiche Höhe der drey Dreyecke AOB, AOC, BOC, in welche ABC getheilt wurde.

Folglich ist das △ ABC, als die Summe dieser Dreyecke, gleich einem Dreyecke, dessen Grundseite gleich ist der Summe der Seiten des Dreyeckes ABC oder seinem Umfange, und der Höhe des Halbmessers des in das △ ABC beschriebenen Kreises; folglich auch dem Rechtecke aus seinem halben Umfange und dem Halbmesser des darin beschriebenen Kreises.

b) Verlängert man nun AB, AC, und halbirt die so bey B und C entstandenen Winkel: so wird G, wo sich CG, BG schneiden, der Mittelpunkt eines Kreises, welcher, mit dem Perpendikel GF = GM = GH als Halbmesser gezogen, die produzirten Linien und die Seite BC in den Punkten F, M, H berührt.

Weil nun jede zwey auf diese Art entstehenden Tangenten, die in einem Punkte zusammenstoßen,

gleich sind (wie leicht aus der Gleichheit der Dreyecke, wozu sie als Seiten gehören, erhellt): so ist

$$AD = AK,$$

eben so $AF = AH$,

folglich auch $DF = KH$, oder $BD + BF = CK + CH$;

oder dafür $BL + BF = CL + CM$

d. i. $2MB + LM = 2CL + LM$;

also $2BM = 2CL$ und $\begin{matrix} BM \\ BF \end{matrix}\Big\} = \begin{matrix} CL \\ CK \end{matrix}\Big\}$.

c) $2AF = \begin{cases} AF + AH \\ AB + \begin{matrix} BF \\ BM \end{matrix}\Big\} + AC + \begin{matrix} CH \\ CM \end{matrix}\Big\} \\ AB + AC + BC\,(= BM + CM) \end{cases}$

oder $AF = \frac{AB + AC + BC}{2}$, d. i. dem halben Umfange des Dreyeckes ABC, dessen

Flächeninhalt folglich $= AF \,.\, OD$.

d) In den nämlichen Dreyecken ADO, AFG ist

$$AD : OD = AF : FG;$$

also $AD \,.\, FG = AF \,.\, OD$.

oder $AD \,.\, FG \,.\, OD \,.\, AF = AF \,.\, OD \,.\, OD \,.\, AF$;

woraus $AF \,.\, AD : AF \,.\, OD = AF \,.\, OD : FG \,.\, OD$

d. i. $AF \,.\, AD : \triangle ABC = \triangle ABC : FG \,.\, OD$.

e) Weil nun der Winkel $GFB = R = BMG$: so ist

$\begin{matrix} m + o \\ n + i \end{matrix}\Big\} = R$, folglich $m + n + o + i = 2R$, oder

$FBM + FGM = 2R = FBM + ABC$, folglich

$ABC = FGM$, oder $\frac{1}{2} ABC = \frac{1}{2} FGM$, d. i. $FGB = DBO$; da nun auch $F = D$: so sind die Dreyecke FBG und BDO ähnlich, folglich ist CF :

$$GF : BF = BD : OD;$$

also $OD \cdot GF = BF \cdot BD$.

Diesen Werth in der letzten Proportion in d) substituirt, ist

$$AF \cdot AD : \triangle ABC = \triangle ABC : BF \cdot BD.$$

f) Man suche nun wie oben unter c) für AF, so für AD, BD, BF ihren Werth:

$$2AD = \begin{cases} AD + AK \\ AB + AC - (BD + CK) \\ AB + AC - (BL + CL) \\ AB + AC - BC \end{cases}$$

$$\text{Also } AD = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{AB + AC + BC}{2} - BC.$$

Bedeutet nun S den Umfang des Dreyeckes: so ist

$$AD = \tfrac{1}{2} S - BC.$$

$$2BD = \begin{cases} BD + BL \\ AB + BC - (AD + CL) \\ AB + BC - (AK + CK) \\ AB + BC - AC. \end{cases}$$

$$\text{Also } BD = \frac{AB + BC - AC}{2} = \frac{AB + BC + AC}{2} - AC$$

$$= \tfrac{1}{2} S - AC.$$

$$2BF = \begin{cases} CL + CK \text{ (unter b)} \\ BC + AC - (BL + AK) \\ BC + AC - (BD + AD) \\ BC + AC - AB. \end{cases}$$

Also $BF = \frac{BC + AC - AB}{2} = \frac{BC + AC + AB}{2} - AB$

$= \frac{1}{2} S - AB.$

g) Ihren Werth in e) substituirt, hat man, wenn A den Flächeninhalt des Dreyeckes bezeichnet:

$\frac{1}{2} S.(\frac{1}{2} S - BC) : A = A : (\frac{1}{2} S - AC)(\frac{1}{2} S - AB)$ d.h.

Der Flächeninhalt eines Dreyeckes ist die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen zwey Rechtecken, deren Seiten sind der halbe Umfang des Dreyeckes und die Ueberschüsse desselben über jede der drey Seiten des Dreyeckes.

b) Aus g) wird

$A = \sqrt{[(\frac{1}{2} S (\frac{1}{2} S - BC)(\frac{1}{2} S - AC)(\frac{1}{2} S - AB)]}.$

Weil, wenn B die Grundlinie und H die Höhe des Dreyeckes, $A = \frac{1}{2} B.H$: so findet man

i) $H = \frac{\sqrt{[(\frac{1}{2} S (\frac{1}{2} S - BC)(\frac{1}{2} S - AC)(\frac{1}{2} S - AB)]}}{\frac{1}{2} B}$

Fig. 18. I. k) Nun ist

$BC : CD = r : \text{sin. } B;$

oder $\frac{1}{2} BC . AB : \frac{1}{2} CD . AB = r : \text{sin. } B.$

Eben so ist $AC : CD = r : \text{sin. } A$

oder $\frac{1}{2} AC . AB : \frac{1}{2} CD . AB = r : \text{sin. } A$

Eben so ist, um den größeren Winkel B zu finden, sowohl für Fig. 18 II. als Fig. 20, aus

§. 6.

$BC : CD = r : \text{sin. } B,$

oder $\frac{1}{2} BC . AB : \frac{1}{2} CD . AB = r : \text{sin. } B.$

Es ist aber $\frac{1}{2}$ CD . AB $=$ $\frac{1}{2}$ H.B $=$ A d. i. dem Flächeninhalte des Dreyeckes; folglich ist allgemein, wenn α irgend einen Winkel und P, Q die ihn umschließenden Seiten bedeuten:

$$\text{fin.}\alpha : r = \sqrt{[(\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S - BC)(\tfrac{1}{2}S - AC)(\tfrac{1}{2}S - AB)]} : \tfrac{1}{2}P.Q,$$

was zu beweisen war.

Beyspiel. Setzen wir wieder wie in §. 66. nach Fig. 18. I. AB $=$ 184′; BC $=$ 64′; AC $=$ 142′, und bedient man sich der Logarithmen; so muß die Rechnung sich nach folgender Gleichung richten, wenn ABC der zu findende Winkel seyn soll:

$$\log.\text{fin. ABC} = \log. r + \frac{\log.\frac{1}{2}S + \log.(\frac{1}{2}S\text{-BC}) + \log.(\frac{1}{2}S\text{-AC}) + \log.(\frac{1}{2}S\text{-AB})}{2} - \log.(\tfrac{1}{2}\text{AB.BC}).$$

log. $\frac{1}{2}$ S	= log. 195	= 2,2900346
log. $\frac{1}{2}$ S — BC	= log. 131	= 2,1172713
log. $\frac{1}{2}$ S — AC	= log 53	= 1,7242759
log. $\frac{1}{2}$ S — AB	= log. 11	= 1,0413927
	Summe	= 7,1729745
durch 2 divid. und 10 add.		= 13,5864872 = R
log. $\frac{1}{2}$ AB . AC	= log. 5888	= 3,7699678 = S
also R — S		= 9,8165194 = Log. fin. ABC
nächst kleinerer Log.		9,8165066 = log. fin. 40° 57′
Unterschied		= 128.

Aber $\frac{128}{24,26} = 5$; folglich findet man hier-

aus den Winkel ABC genau wie oben = 40° 57′ 5″, 2.

§. 69.

Aufl. 4. Man kann auch aus der Höhe des Dreyeckes, welche man aus dem durch die drey gegebenen Seiten bestimmten Flächeninhalte findet, die Winkel des ungleichseitigen Dreyeckes berechnen.

So ist nach §. 68. h)

$$\log. H = \frac{\log.\frac{1}{2}S + \log(\frac{1}{2}S\text{-}BC) + \log.(\frac{1}{2}S\text{-}AC) + \log.(\frac{1}{2}S\text{-}AB)}{2} - \log.\tfrac{1}{2}B.$$

Suchen wir nun den Winkel ABC nach derselben Figur, wie vorher: so wird AB = 184 die Grundlinie, deren Hälfte 92 ist. Aus dem vorigen Beyspiele hat man schon

$$\frac{\log.\frac{1}{2}S....}{2} = 3,5864872$$

$$-\log. 92 = -\ 1,9637878$$

$$1,6226994 = \log. H = \log. CD.$$

Aber BC : CD = r : sin. ABC

d. i. 1,6226994

10,....

— 1,8061800

9,8165194 = log. sin. ABC.

Diesem Log. sin., welcher derselbe ist, den wir im vorigen Beyspiele §. 68 gefunden haben, entspricht wieder der Winkel 40° 57′ 5″, 2 = ABC.

Zusatz. Suchte man den Winkel BAC: so zöge man nur den log. 142 = log. AC statt (wie nur so geschehen) des log. 64 (= log. BC) ab. Man erhielte hierdurch

11,6226994

— 2,1522883

9,4704111 = log. sin. BAC,

folglich BAC = 17° 10′ 53″, 5.

§. 70.

Da der Sinus jenes stumpfen Winkels derselbe ist, als der seines Supplementwinkels; es folglich beym Auffinden des Sinus des der größten Seite entgegenliegenden Winkels zweifelhaft bleibt, ob dieser spitz oder stumpf sey: so ist es sehr bequem, nur den Sinus oder Cosinus des halben Winkels, welcher zuverläßig spitz ist, zu suchen.

Aufl. 5. Man schließe: Das Quadrat des Sinus des halben Winkels α verhält sich zum Quadrat des Sinus totus, wie das Rechteck aus den Ueberschüssen des halben Umfanges des Dreyeckes über seine

den

den Winkel einschließenden Seiten zum Rechtecke aus eben diesen Seiten um den Winkel.

Fig. 19. Beweis. Es gelten aus der Construction der Figur die Proportionen

$$AO : DO = r : \sin. DAO \text{ oder } : \sin. \tfrac{1}{2} BAC$$
$$AG : FG = r : \sin. FAG \text{ oder } : \sin. \tfrac{1}{2} BAC.$$

Also $AO . AG : DO . FG = r^2 : \sin. (\tfrac{1}{2} BAC)^2$

Eben so

$$AO : AD = r : \cos. DAO \ (: \cos. \tfrac{1}{2} BAC)$$
$$AG : AF = r : \cos. FAG \ (: \cos. \tfrac{1}{2} BAC)$$

Also $AO . AG : AD . AF = r^2 : \cos. (\tfrac{1}{2} BAC)^2$

Man suche nur den Werth für die Glieder der ersten Verhältnisse. Aus §. 68 c) f) ist

$$AF . AD = \tfrac{1}{2} S \ (\tfrac{1}{2} S - BC)$$

aus e) ist $DO . FG = BD . BF = (\tfrac{1}{2} S - AC) \ (\tfrac{1}{2} S - AB) . f)$

Ferner sind die Dreyecke BDO, ACG ähnlich. Denn der Winkel $BAO = GAC$, aber auch der W. $ABO = AGC$.

Denn $CBO = \tfrac{1}{2} ABC$ ex constr.

$$GBC = \tfrac{1}{2} FBC$$

aber $ABC + FBC = 2 R$

folglich $CBO + GBC = GBO = R$.

Eben so wird bewiesen, daß auch $GCO = R$ ist.

Halb-

Halbirte man daher die 2 gleiche Winkel des Viereckes BOCG, und zöge durch drey entgegengesetzte Ecke oder Punkte einen Kreis: so würde derselbe auch durch den vierten z. B. G gehen, folglich ein um das Viereck beschriebener Kreis seyn. *) In diesem Falle aber ruhen die Schenkel der beyden Peripheriewinkel CBO, OGC auf demselben Bogen des Kreises; sind folglich gleich, und daher auch ABO = AGC. Also ꝛc.

In diesen ähnlichen Dreyecken nun ist

$$AO : AB = AC : AG$$

also $AO . AG = AB . AC.$

Ihren Werth in den obigen Proportionen gehörig substituirt, erhält man

$$AB . AC : (\tfrac{1}{2}S - AC)(\tfrac{1}{2}S - AB) = r^2 : \sin.(\tfrac{1}{2}BAC)^2$$

Und

$$AB . AC : \tfrac{1}{2}S\,(\tfrac{1}{2}S - BC) = r^2 : \cos.(\tfrac{1}{2}BAC)^2$$

w. z. b. w. **)

Beyspiel. Suchten wir demnach zuerst den Fig. der größten Seite AB = 184 entgegenstehenden 18. I. Winkel des ungleichseitigen Dreyeckes ABC, den wir bisher nicht direkt berücksichtigten, und wendeten zu-

---

*) S. Joh. Schulz Lehrb. d. Mathem. I. Theil § 181.

**) In Ansehung der diese Beweise betreffenden Geschichte verweise ich auf das angeführte Buch des H. Prof. Pfleid. §. 162.

zugleich die Logarithmen an: so müßten die obigen Analogien, weil nun BC und AC die den Winkel ACB umschließenden Seiten sind, in folgenden Gleichungen ausgedrückt werden:

$$\text{l. sin. } \tfrac{1}{2}\,\text{ACB} = \frac{\text{2.l.r} + \text{l.}(\tfrac{1}{2}\text{S} - \text{AC}) + \text{l.}(\tfrac{1}{2}\text{S} - \text{BC}) - (\text{l.AC} + \text{l.BC})}{2}$$

und

$$\text{l. cos. } \tfrac{1}{2}\,\text{ACB} = \frac{2\text{o} + \text{l.}\tfrac{1}{2}\text{S} + \text{l.}(\tfrac{1}{2}\text{S} - \text{AB}) - (\text{l. AC} + \text{l.BC})}{2}$$

Die Berechnung stünde folglich so:

2.l.r	=	20,...
l.($\frac{1}{2}$S—AC)	=	1,7242759 §. 68. B.
l.($\frac{1}{2}$S—BC)	=	2,1172713 ebend.
arithm. Erg. (l.AC + l.BC)	=	6,0415317
		129,8830789
durch 2 divid.		9,9415394 = l. sin. $\frac{1}{2}$ACB;

folglich $\frac{1}{2}$ACB = 60° 56′, und ACB = 121° 52′.

Eben so

		20,....
l. $\frac{1}{2}$S	=	2,2900346 §. 68. B.
l.($\frac{1}{2}$S—AB)	=	1,0413927 ebend.

arithm.

arithm. Erg. v. l. AC + l. BC = 6,0415317 wie vorh.

129,3729590

durch 2 divid. 9,6864795 = l. cos. ½ ACB

nächst klein. log. 9,6862542 = l. cos. 60° 57′

Unterschied = 2253

Also, da $\frac{2253}{37,90} = 59''$, ist ½ ACB = 60°

56′ 1″ §. 32. Zus. 1.

Daher ACB = 121° 52′ 2″.

§. 71.

Ich habe absichtlich die Resolution des ungleichseitigen Dreyeckes aus drey gegebenen Seiten bisher blos geometrisch behandelt, um augenscheinlich darlegen zu können, welche Leichtigkeit und Kürze uns die analytische oder algebraische Methode darbietet, denselben Zweck mit gleicher Sicherheit zu erreichen.

Ich fange von der letztern Auflösungsart an.

Erstens. Aus §. 64 hat man

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \text{cos.} \alpha$$

$$\text{also cos.} \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

oder

$$\text{oder } 1 - \text{cof.}\alpha = 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab}$$

$$= \frac{(c + a - b)\ (c - a + b)}{2ab};$$

$$\text{folglich } \frac{1 - \text{cof.}\alpha}{2} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab};$$

$$\text{folglich } \text{fin.}\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(a + c - b)\ (b + c - a)}{4ab} \quad \text{n. 38.}$$

Eben so:

$$1 + \text{cof.}\alpha = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{(a + b + c)\ (a + b - c)}{2ab};$$

$$\text{also } \frac{1 + \text{cof.}\alpha}{2} = \frac{(a + b + c)\ (a + b - c)}{4ab}$$

$$\text{cof.}\tfrac{3}{2}\alpha^2 = \frac{(a + b + c)\ (a + b - c)}{4ab}.$$

folglich $\text{sin.}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left[\frac{(a+c-b)(b+c-a)}{4ab}\right]}$

und

$$\text{cos.}\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left[\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}\right]}.$$

Aus diesen Formeln findet man den Winkel, welcher der Seite c entgegen liegt.

Anm. Bedient man sich hiebey der Logarithmen: so folgt von selbst, daß man zu dem Werthe für log. sin. $\frac{1}{2}\alpha$; log. cos. $\frac{1}{2}\alpha$ noch 10 oder log. r. addiren müsse, um diesen Log. für den Sinus totus der gewöhnlichen Tafeln zu erhalten, indem jene Formeln nur unter Voraussetzung des Halbm. $= 1$ gefunden werden.

Beyspiel. Setzte man also, wie oben, AB $= a = 184'$; BC $= B = 64'$; AC $= c = 142'$: so fände man $\alpha = ABC$ durch folgende Rechnung.

$\frac{1}{2}$ log. $(a+c-b) = 1{,}2091506$
$\frac{1}{2}$ log. $(b+c-a) = 0{,}6712113$
$10{,}\ldots$
$11{,}8803619$
$\frac{1}{2}(\text{log. } a + \text{log. } b + \text{log. } 4) = 2{,}3365289$
log. sin. $\frac{1}{2}\alpha = 9{,}5438330 =$ log.
sin. $20^\circ\ 28'\ 32''$

also $\alpha = ABC = 40^\circ\ 57'\ 4''$.

Eben so:

$$\log.\tfrac{1}{2}(a+b+c) = 1{,}2955323$$
$$\log.\tfrac{1}{2}(a+b-c) = 1{,}0126529$$
$$10{,}\ldots$$
$$12{,}3081852$$
$$2{,}3365289 \text{ wie vorh.}$$

$$\log.\text{cos.}\tfrac{1}{2}\alpha = 9{,}9716563 = \log.$$

cos. 20° 28′ 33″

Also $\alpha = ABC = 40°\ 57'\ 6''$.

Zusatz. Weiß ich aber einen Winkel: so kann man nach §. 62 den andern z. B. C finden, indem $C = \frac{AB}{AC}$. sin. B, woraus der dritte Winkel $A = 180° - (B+C)$ erhalten wird.

§. 72.

Zweytens. Es ist $(1+\text{cos.}\alpha)(1-\text{cos.}\alpha) = 1-\text{cos.}\alpha^2 = \text{sin.}\alpha^2$ n. 9. Folglich ist

$$\text{sin.}\alpha^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4a^2b^2}$$

oder sin. $\alpha =$

$$\frac{1}{2ab}\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}\text{*)}$$

Drit-

*) Es ist nicht zu übersehen, daß diese auf analytische Art leicht entwickelte Formel denselben Satz enthält, den wir geometrisch im §. 68. viel weitläufiger beweisen mußten.

Drittens. Das Perpendikel oder die Höhe CD des Dreyeckes ABC ist, weil r : sin. CBD = BC : CD, = b sin. α, folglich ist durch Substitution für sin. α

$$H = CD = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2a}$$

Man vergleiche hier wieder §. 69.

Viertens. Der Flächeninhalt des Dreyeckes ABC ist $= CD . \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} ab . \sin. \alpha$, folglich

Inhalt des $\Delta = A =$

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

vergl. mit §. 68. h).

§. 73.

Wir wollen nun noch einige Formeln entwickeln, welche den Zusammenhang der bekannten Stücke des Dreyeckes mit dem Gesuchten so darstellen, daß man letzteres finden kann, ohne nöthig zu haben, etwas andres vorher zu berechnen.

I. Wenn man die Gleichung §. 64 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab . \cos. \alpha$, wodurch man in einem jeden Dreyecke aus einem Winkel und den ihn einschließenden Seiten die dem gegebenen Winkel (α) entgegenliegende Seite unmittelbar finden kann, in diese

$$b^2 = c^2 - a^2 + 2ab . \cos. \alpha$$

verwandelt: so hat man eine Gleichung, wodurch überhaupt der Zusammenhang der drey Seiten und

eines gegebenen eines jeden beliebigen Winkels-Dreyeckes ausgedrückt wird, so, daß aus 3 gegebenen das 4te leicht gefunden wird; so dient sie, wenn man aus ihr $\cos.\alpha$ gehörig entwickelt, aus drey gegebenen Seiten die Winkel zu finden. Für diesen Fall deduzirten wir aber, weil die Formel nicht durch Logarithmen zu berechnen ist, im §. 71 eine andere für $\sin.\frac{1}{2}\alpha$; $\cos.\frac{1}{2}\alpha$, und im §. 72 für $\sin.\alpha$.

Aus vorstehender Gleichung nun erhält man, wenn auf beyden Seiten b^2 und $2ab.\cos.\alpha$ abgezogen, hingegen a^2 und $b^2.\cos.a^2$ addirt wird:

$$a^2 - 2ab\cos.\alpha + b^2\cos.\alpha^2 = c^2 - b^2 + b^2\cos.\alpha^2$$

oder $(a - b.\cos.\alpha)^2 = c^2 - b^2(1 - \cos.\alpha^2)$

$$= c^2 - b^2.\sin.\alpha^2.\ \text{n. 9.}$$

Also $a - b.\cos.\alpha = \pm\sqrt{[(c+b\sin.\alpha).(c-b\sin.\alpha)]}$;

woraus $a = b.\cos.\alpha \pm \sqrt{[(c+b\sin.\alpha).(c-b.\sin.\alpha)]}$

Mittels dieser Formel kann man eine jede der zwey Seiten, die einen gegebenen Winkel einschließen, aus diesem, der andern ihn einschließenden, und der ihm gegenüberliegenden Seite finden.

Anm. Das Zeichen der Wurzelgröße bleibt so lange zweydeutig, als $c < b$, aber doch $c > b.\sin.\alpha$; sie wird aber gehoben, sobald $c = b$ oder $c > b$ wird, in welchem Falle das Zeichen $+\sqrt{}$ gilt. Man vergleiche hiemit, was im Beysp. II. §. 62. gesagt worden.

Folgende Beyspiele werden die Anwendbarkeit dieser Formeln erläutern.

Beyspiel I. Es seyen die beyden den Winkel α einschließenden Seiten $a = 218$ Fuß; $b = 646'$; $c = 862'$; man soll den W. α finden.

Die Gleichung ist $\cos. \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, folglich ohne Logarithmen:

$$a^2 + b^2 - c^2 = -278204$$
$$2ab = 281656$$
$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -0{,}9877439 = \cos. 8^\circ\, 57'\, 50''{,}5$$

(aus Vega's Tafel III.); folglich ist α wegen des Cosinus negativen Werthes $= 180^\circ - 8^\circ\, 57'\, 50''{,}5 = 171^\circ\, 9'\, 19''{,}5$. (Vergl. §. 64. Beysp.).

Beyspiel II. Es seyen gegeben die Seiten $b = 2731$ Ruthen, $c = 1357$ Ruthen, und $\alpha = 23^\circ\, 51'\, 13''$; man soll die dritte Seite dieses Dreyeckes finden, welche dem gegebenen Winkel anliegt.

$$b. \sin. \alpha = 1104{,}41968$$
$$c = 1357{,}\ldots$$
$$c + b. \sin. \alpha = 2461{,}41968$$
$$c - b. \sin. \alpha = 252{,}58032$$
$$(c + b. \sin. \alpha)(c - b. \sin. \alpha) = 621706{,}17043$$

$\sqrt{[(c+b.\sin.\alpha)(c-b.\sin.\alpha)]} = 788{,}48346$

$b.\cos.\alpha = 2497{,}72262$

Demnach a sowohl $= 3286{,}20608$

als auch $a = 1709{,}23916$.

§. 74.

II. Um aus aufeinanderfolgenden Seiten und Winkeln das Verlangte zu suchen, dienen folgende Gleichungen:

Wenn die den Winkel α einschließenden Seiten b und c und die Winkel α und φ die vier aufeinanderfolgenden Stücke des beliebigen Dreyeckes sind; so ist der dritte der Seite b entgegenstehende Winkel $\psi = 180° - (\alpha + \varphi)$, folglich $\sin.\psi = \sin.(\alpha+\varphi)$ §. 18. Zus. 3.

Es ist aber

$b : c = \sin.\psi : \sin.\varphi = \sin.(\alpha+\varphi) : \sin.\varphi$

$= \sin.\alpha.\cos.\varphi + \cos.\alpha.\sin.\varphi : \sin.\varphi$. n. 57.

Letzteres Gleichungsglied durch $\sin.\varphi$ dividirt, hat man nach n. 21.

$b : c = \sin.\alpha.\cot.\varphi + \cos.\alpha : 1$;

also 1) $b = c(\cos.\alpha + \sin.\alpha.\cot.\varphi)$

und $b = c.\sin.(\alpha+\varphi) : \sin.\varphi$ (aus der obigen Anal.)

Aus beyden Formeln läßt sich die zwischen den beyden gegebenen Winkeln liegende Seite berechnen.

Hieraus folgen

2) $c = b : (\text{cof.}\,\alpha + \text{sin.}\,\alpha \,.\, \text{cot.}\,\varphi)$

$c = b \,.\, \text{sin.}\,\varphi : \text{sin.}\,(\alpha + \varphi)$.

Wieder 2 Formeln, woraus die Seite eines Dreyeckes, welche einem der beyden gegebenen Winkeln anliegt, aus diesen Winkeln und der zwischen denselben liegenden Seite berechnet werden kann.

Multipliziren wir die erste Gleichung in 1) wirklich mit c, ziehen dann auf beyden Seiten $c \,.\, \text{cof.}\,\alpha$ ab, und dividiren durch $c \,.\, \text{sin.}\,a$: so erhalten wir

3) $\text{cot.}\,\varphi = (b - c \,.\, \text{cof.}\,\alpha) : c \,.\, \text{sin.}\,\alpha$.

Oder auch $\text{cot.}\,\varphi = b : c \,.\, \text{sin.}\,\alpha - \text{cot.}\,\alpha$. n. 21.

Mittels beyder Formeln kann man aus 2 Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, den einer der gegebenen Seiten anliegenden Winkel bestimmen.

Wenn man endlich in 1) für $\text{cof.}\,\alpha$ und $\text{sin.}\,\alpha$ ihren Werth nn. 120, 113 substituirt: so erhält man

$$b = \frac{c - c \,.\, \text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha^2 + 2 \,.\, c \,.\, \text{cot.}\,\varphi \,.\, \text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha}{1 + \text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha^2}$$

oder $b + b \,.\, \text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha^2 = c - c \,.\, \text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha^2 + 2 \,.\, c \,.\, \text{cot.}\,\varphi \,.\, \text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha$;

also $(b + c)\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha^2 - 2 \,.\, c \,.\, \text{cot.}\,\varphi \,.\, \text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha = c - b$

oder $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{2 \,.\, c \,.\, \text{cof.}\,\varphi}{(b + c) \,.\, \text{sin}\,\varphi} \,.\, \text{tang.}\,\frac{1}{2}\alpha = \frac{c - b}{b + c}$ n. 21.

Setzt man auf beyden Seiten $\left[\frac{c \cdot \text{col.}\,\varphi}{(b+c)\,\text{sin.}\,\varphi}\right]^2$ hinzu: so wird

$$\left(\text{tang.}\tfrac{1}{2}\alpha - \frac{c \cdot \text{col.}\,\varphi}{(b+c)\,\text{tang.}\,\varphi}\right)^2 = \frac{c^2 \cdot \text{sin.}\,\varphi^2 - b^2 \cdot \text{sin.}\,\varphi^2 + c^2 \cdot \text{col.}\,\varphi^2}{(b+c)^2 \cdot \text{sin.}\,\varphi^2}$$

$$= \frac{c^2\,(\text{sin.}\,\varphi^2 + \text{col.}\,\varphi^2) - b^2\,\text{sin.}\,\varphi^2}{(b+c)^2 \cdot \text{sin.}\,\varphi^2}$$

$$= \frac{c^2 - b^2\,\text{sin}\,\varphi^2}{(b+c)^2 \cdot \text{sin.}\,\varphi^2}$$ n. 118.

Auf beyden Seiten die Wurzel ausgezogen und durch Metathesis hat man

$$4)\ \text{tang.}\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{c.\text{col.}\,\varphi \mp \sqrt{[(c+b\,.\,\text{sin.}\,\varphi)(c-b.\text{sin.}\,\varphi)]}}{(b+c)\,.\,\text{sin.}\,\varphi}$$

Diese Formel dient, um aus zwey mit dem anliegenden Winkel gegebenen Seiten, den von denselben eingeschlossenen Winkel zu finden.

Anm. Sobald die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite $c > b$, d. i. größer als die, woran der Winkel liegt; so gilt $+\sqrt{}$.

§. 75.

Nach den bisher vorgetragenen Prinzipien der Resolution geradliniger Dreyecke können nicht nur diejenigen Aufgaben, wobey nicht unmittelbar Stücke des Dreyeckes, sondern mitunter Summen oder

Unter-

Unterschiede oder Flächenraum gegeben sind, aufgelöst werden: sondern, wie ich gleich Anfangs bemerkte, auch die Polygone jeder Art, selbst den Kreis nicht ausgenommen, können nach eben jenen Grundsätzen, und zwar leichter, wenigstens sicherer und genauer, als es die niedere Geometrie zu leisten im Stande ist, berechnet werden.

Man erwarte nicht, daß ich hier alle Aufgaben dieser Art aufzählen werde. Denn es leuchtet schon aus dem Gesagten ein, daß es dieser Aufgaben eine Menge geben müsse.

Nur einige derselben mögen also hier stehen.

Aufg. 1. Es sey gegeben AC = a, der gegenüberstehende Winkel = B = α, und die Summe der übrigen Seiten b + c = q. Man soll hieraus die 2 Seiten und übrigen Winkel bestimmen. Fig. 20.

Aufl. Man suche den Unterschied der Seiten b — c = d, welchen man aus den Gleichungen §. 71 z. B. erhält. Es wird nämlich itzt, wo b und c die den Winkel α umschließenden Seiten sind,

$$\text{sin. } \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(a+d)\,.\,(a-d)}{4bc} \text{ und}$$

$$\text{cos. } \tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(q+a)\,(q-a)}{4bc}$$

Also $\text{tang.}\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{a^2-d^2}{q^2-a^2}$ n. 16.

d. i. $\text{tang.}\frac{1}{2}a^2 \cdot (q^2-a^2) = a^2-d^2$.

Subtrahirt man nun die Hälfte der Wurzel aus d^2 von $\frac{1}{2}q$: so hat man die kleinere; die größere Seite aber durch Addition beyder Größen.

Aufg. 2. Es sey gegeben die Höhe $CD = h$, die Grundlinie $AB = b$, und Summe der Seiten; die Seiten selbst zu bestimmen.

Aufl. Nach §. 72. III erhalten wir hier

$$2bh = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Quadrirt man diese Gleichung, und substituirt zugleich den gehörigen Werth, nämlich $q = a+b+c$, $q-b = a+c$ bekannt, ferner $a-c = d$ d. i. dem zu findenden Unterschiede: so erhält man

$$4b^2h^2 = q(b-d)(q-2b)(b-d)$$
$$= q(q-2b)(b^2-d^2)$$

daher $b^2-d^2 = \frac{4b^2h^2}{q(q-2b)}$

und $d^2 = b^2 - \frac{4b^2h^2}{q(q-2b)}$.

Hieraus findet man die Größe d, welcher ein 2facher Werth zukommt, weil es gleichgültig ist, welche Seite ich a und welche Seite c nenne; folglich a—c sowohl AC—BC, als BC—AC bedeuten kann.

Uebrigens ist klar, daß aus dem gefundenen Unterschiede der Seiten diese selbst, wie vorher, bestimmt werden können.

Aufg. 3. In einem rechtwinklichten Dreyecke ACD sind ein Kathetus und die Summe der 2 übrigen Seiten gegeben; diese Seiten selbst zu finden. Fig. 21.

Aufl. Es sey der gegebene Kathetus AD $= a$, und $CD + AC = b + c = q$, $b - c = d$, der rechte Winkel α. Dem gemäß wird aus den Gleichungen §. 71.

$$\text{sin.}\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(a-d)(q-a)}{4ac} \text{ und}$$

$$\text{cos.}\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(a+q)(a-d)}{4ac}.$$

Durch Division jener Gleichung durch diese wie vorhin, ist

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(a+d)\ q-a)}{(a+q)\ (a-d)}.$$

Nun bedeutet aber α den rechten Winkel, folglich ist nach §. 17. Zus. 3.

$$(a+d)\ (q-a) = (a+q)\ (a-d)$$

woraus $2dq = 2a^2$ und $d = \frac{a^2}{q}$ wird.

Nun

Nun ist die Hypotenuse b die größere Seite $= \frac{1}{2}(q + d)$ folglich $b = \frac{q^2 + a^2}{2q}$; und der zweyte Kathetus

$$c = \frac{1}{2}(q - d) = \frac{q^2 - a^2}{2q};$$

§. 76.

Eine Menge dergleichen nützlicher Aufgaben hat Herr Prof. Rüdiger im 2ten Bande seines Handbuches der rechnenden Astronomie von S. 10 und ff. mit leichten Formeln, welche die Auflösung enthalten, aufgestellt. Ich habe zu den letztern die Beweise gesucht, und halte es für vortheilhaft, hier noch einiger dieser Aufgaben zu erwähnen.

Fig. 20. a. Aus dem gegebenen Unterschiede der Hypotenuse und eines Perpendikels a—c, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel B das diesem entgegenstehende Perpendikel b zu finden.

Formel. $b = (a - c) \cdot \cot. \frac{1}{2} B.$

Beweis. $a + c = 1 + \cos. B$; $a - c = 1 - \cos. B.$

Aber $b^2 = a^2 - c^2 = (a + c)(a - c)$

$= (1 + \cos. B)(1 - \cos. B);$

folg-

folglich $\frac{b^2}{(a-c)(a-c)} = \frac{(1+\text{cof. B})\ (1-\text{cof. B})}{(1-\text{cof. B})\ (1-\text{cof. B})}$

$$= \frac{1+\text{cof. B}}{1-\text{cof. B}},$$

oder $b^2 = \left\{\frac{1+\text{cof. B}}{1-\text{cof. B}}\right\} \cdot \left((a-c)^2\right)$

$$b = \sqrt{\left\{\frac{1+\text{cof. B}}{1-\text{cof. B}} \cdot (a-c)^2\right\}}$$

also $b = (a-c) \cdot \cot. \frac{1}{2} B$ n. 51.

Und mit Logarithmen

$\log. b = \log. (a-c) + \log. \cot. \frac{1}{2} B - 10.$

b. Es sey wieder a—c und C gegeben, man soll das dem Winkel C anliegende Perpendikel finden.

Formel. $b = (a-c) \cdot \cot. (45^\circ - \frac{1}{2} C).$

Beweis wie zuvor. Denn $\frac{1}{2} B = \frac{1}{2} (90^\circ - C) = 45^\circ - \frac{1}{2} C.$

c. Aus der gegebenen Summe der Hypotenuse und eines Perpendikels $a+c$, und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel B das diesem Winkel gegenüberliegende Perpendikel b zu finden.

Formel. $b = (a+c) \cdot \text{tang. } \frac{1}{2} B.$

Beweis. Es ist, wie unter a)

$$\frac{b^2}{(a+c)^2} = \frac{(1+\text{cof. B}).(1-\text{cof. B})}{(1+\text{cof. B}).(1+\text{cof. B})}$$

folglich $b = \sqrt{\left[\frac{1-\text{cof. B}}{1+\text{cof. B}} \cdot (a+c)^2\right]}$

also $b = (a+c).\text{tang.}\frac{1}{2}B$. n. 49.

d. Gegeben sind $a+c$ und C, das anliegende Perpendikel b zu finden.

Formel. $b = (a+c).\text{tang.}(45° - \frac{1}{2}C)$.

Beweis wie unter b) verbunden mit c).

e. Aus dem gegebenen Unterschiede der Perpendikel $c-b$, und einem Winkel B, der $< 40°$, die Summe $c+b$, d. i. der Katheten zu finden.

Formel. $c+b = (c-b).\text{cot.}(45° - B)$.

Beweis. $c = \text{cof. B}$, und $b = \text{sin. B}$;

also $c+b = \text{cof. B} + \text{sin. B}$

oder $\frac{c+b}{c-b} = \frac{\text{cof. B}+\text{sin. B}}{\text{cof. B}-\text{sin. B}} = \text{cot.}(45° - B)$. nn. 134, 20.

also $c+b = (c-b).\text{cot.}(45° - B)$ und

$\log.(c+b) = \log.(c-b) + \log.\text{cot.}(45° - B) - 10$.

Zusatz 1. Ist $B > 45°$: so wird nun $b-c$ die Differenz der Perpendikel, und $b+c$ gesucht. In diesem Falle ist dann

$b+c = (b-c).\text{cot.}(B - 45°)$.

Zusatz 2. Umgekehrt: Gäbe man die Summe der Katheten $c+b$ und $B<45°$, und sucht $c-b$: so wäre blos, wie in Aufg. e) und nach n. 134.

$$c-b = (c+b)\,\text{tang.}\,(45°-B)$$

Wäre $B>45°$: so würde dann

$$b-c = (b+c)\,.\,\text{tang.}\,(B-45°).$$

U. s. w.

§. 77.

Aber auch die Aufgaben zweyter Art §. 75. hier vollständig aufzuzählen und Auflösungen anzugeben, würde zur unnöthigen Weitläuftigkeit führen.

Haben sich Anfänger und überhaupt diejenigen, welchen dergleichen Aufgaben nicht selten vorkommen, hinlängliche Bekanntschaft mit den Prinzipien der Auflösung, und einige Fertigkeit in Anwendung derselben auf einzelne Fälle verschafft: so kann es ihnen dann nicht mehr fehlen, auch die übrigen Fälle unter jene Prinzipien richtig zu subsumiren, und sie durch Rechnung aufzulösen.

Wer größere Vollständigkeit wünscht, den verweise ich auf die mehrmals genannte Schrift des Hrn. Prof. Pfleiderer und L'Huilier Polygonometrie.

Aufg. 1. Im Parallelogramm ABCD seyen zwey anliegende Seiten $AD=F$, $AB=g$ und ein Winkel $A=\alpha$, oder auch $B=\beta$ Fig. 22.

$B = \beta$ gegeben; die beyden Diagonale $AC = a$, $BD = b$ zu finden.

Aufl. Es ist nach §. 64. B.

$$a^2 = f^2 + g^2 - 2fg \cdot \cos. \alpha$$

und $b^2 = f^2 + g^2 - 2fg \cdot \cos. \beta$

$- \cos. \beta$ aber $= + \cos. \alpha$, also $b^2 = f^2 + g^2 + 2fg \cdot \cos. \alpha$.

Man hat also durch Wurzelausziehung das verlangte a und b aus dem Gegebenen.

Zusatz. Es ist also

$$a^2 + b^2 = 2(f^2 + g^2),$$

$$a^2 - b^2 = -4fg \cdot \cos. \alpha$$

oder $b^2 - a^2 = +4fg \cdot \cos. \alpha$

das heißt: In einem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate beyder sich kreuzenden Diagonalen das Doppelte der Summe der Quadrate beyder Seiten, und der Unterschied der Quadraten aus den Diagonalen das positive oder negative vierfache Produkt beyder Seiten in den Cosinus des spitzen Winkels.

Aufg. 2. Aus 2 gegebenen Seiten AB, BC des Dreyeckes ABC und dem eingeschlossenen Winkel B, den Inhalt des Dreyeckes zu finden.

Aufl. Wenn $AB = b$, $BC = a$, der eingeschlossene Winkel $= \alpha$ und der Flächenraum $= A$: so ist

$$A = \tfrac{1}{2} b \cdot a \cdot \sin. \alpha$$

Beweis. Denn es ist $A = CD \cdot \frac{1}{2} b$; CD aber $= a \cdot \sin. \alpha$ §. 72. III.

Zusatz. Dasselbe gilt, wenn das Perpendikel nur auf eine zu verlängernde Seite fällt, wie leicht erhellt.

Aufg. 3. Aus 2 gegebenen Seiten a, b und einem Winkel, welcher einer dieser Seiten entgegensteht, z. B. β, den Inhalt des Dreyecks zu suchen.

Aufl. Man finde den eingeschlossenen Winkel α, nachdem man mittels der Analogie

$$a : b = \sin. \beta : \sin. \gamma$$

den der andern Seite entgegenliegenden Winkel gesucht hat; indem nun $\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$. Hieraus hat man folglich nach Aufg. 2 das Gesuchte.

§. 78.

Aufg. 4. Aus einer gegebenen Seite a mit den 2 anliegenden Winkeln α und γ den Flächeninhalt A des Dreyeckes zu finden.

Aufl. Sind beyde gegebene Winkel spitz: so ist

$$A = \frac{\frac{1}{2} a^2}{\cot. \alpha + \cot. \gamma}.$$

Ist aber z. B. γ stumpf: so ist

$$A = \frac{\frac{1}{2} a^2}{\cot. \alpha - \cot. \gamma}.$$

Fig. 18. **Beweis. I.** Es sey im Dreyecke ABC, dessen Inhalt gesucht wird, $AB = a$, $A = \alpha$, $B = \gamma$; das Perpendikel CD, welches auf AB fällt, $= p$. $AD = s$, daher $BD = a - s$.

Es ist nun im Dreyecke ACD

$$p : s = 1 : \begin{cases} \text{tang. DCA} \\ \text{cot. } \alpha \end{cases}$$

folglich $p = \frac{s}{\text{cot.}\alpha}$.

Eben so ist

$$p : a - s = 1 : \begin{cases} \text{tang. BCD} \\ \text{cot. } \gamma \end{cases}$$

Daher $p = \frac{a-s}{\text{cot. } \gamma} = \frac{s}{\text{cot. } \alpha}$.

Oder diese 2 Gleichungen in eine Proportion verwandelt, hat man

$$s : a - s = \text{cot. } \alpha : \text{cot. } \gamma$$

oder $\begin{cases} s \\ a \end{cases} + a - s : s = \text{cot. } \alpha + \text{cot. } \gamma : \text{cot. } \alpha$

Also $s = \frac{a \,.\, \text{cot. } \alpha}{\text{cot.}\alpha + \text{cot.}\gamma}$; durch Subst. wird also

$p = \frac{a}{\text{cot.}\alpha + \text{cot.}\gamma}$. Aber der Flächenraum

$A = \frac{1}{2} a \,.\, p$,

folglich $A = \frac{\frac{1}{2} a^2}{\text{cot.}\alpha + \text{cot.}\gamma}$.

Beweis II. Nähme man die Seite AC = a und A = α, den stumpfen Winkel BCA = γ als gegeben an: so ergiebt sich, daß das durch das Perpendikel BH = p aus der verlängerten Seite AC abgeschnittene Stück CH = s eigentlich negativ ist, wenn man C als den Mittelpunkt, oder den in ihm errichteten senkrechten Halbmesser als die Grenze des Ueberganges vom Positiven ins Negative oder vom ersten Quadranten in den zweyten betrachtet.

Um sich dieses klar zu machen, darf man nur das stumpfwinklige Dreyeck JCH Fig. 3. mit dem von JD abgeschnittenen DC, und den Quadranten BH als ersten betrachten.

Dies vorausgesetzt, ist nun wie vorher

$$p : -s = 1 : \begin{cases} \text{tang. HBC} \\ -\text{cot. BCH} \end{cases}$$

$$\text{also } p = \frac{-s}{-\text{cot. BCH}}.$$

$$\text{Und } p : a + (-s) = 1 : \begin{cases} \text{tang. HBA} \\ \text{cot. } \alpha \end{cases}$$

$$\text{also } p = \frac{a - s}{\text{cot. } \alpha}. \text{ Daraus ist weiter}$$

$$a - s : -s = \text{cot. } \alpha : -\text{cot. BCH}$$

$$\text{oder } a - s - (-s) : -s = \text{cot. } \alpha + \text{cot. BCH} : -\text{cot. BCH}$$

$$\text{oder } a : -s = \text{cot. } \alpha + \text{cot. BCH} : -\text{cot. BCH}$$

Also $-s = \frac{a, - \cot. BCH}{\cot. \alpha + \cot. BCH}$. Dieses substituirt im obigen Werthe von p, wird

$$p = \frac{a}{\cot. \alpha + \cot. BCH};$$ aber $+ \cot. BCH = - \cot. \gamma$

also $A = \frac{\frac{1}{2} a^2}{\cot. \alpha - \cot. \gamma}$.

Zusatz. Der §. 68, oder die Formel im §. 72. IV. enthält die Auflösung des Problems aus 3 gegebenen Seiten den Flächeninhalt des Dreyeckes zu berechnen. Hier merke ich nur noch an, daß, wenn das Dreyeck gleichschenklig ist, d. i. wenn $a = b$: so ist sein Inhalt $= \frac{1}{4} c \sqrt{(2a + c)(2a - c)}$; ist es aber gleichseitig, oder $a = b = c$: so ist sein Inhalt $= \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$.

§. 79.

Fig. 23. Aufg. 5. Man soll mittels der nach §. 63 gefundenen unzugänglichen Entfernung AB die Größe und Lage einer neuen Grundlinie CD, an welcher die Winkel ACB, ACD, CDA, CDB gegeben sind, zur Fortsetzung trigonometrischer Operationen bestimmen, 2. den Inhalt des Viereckes ABCD finden.

Aufl. Im △ ACD ist CD:AC = sin. CAD:sin. CDA
im △ CDB ist BC:CD = sin. CDB:sin. CBD

---

also BC:AC = sin. CAD . sin. CDB:
sin. CDA . sin. CBD.

Ist nun das erste Glied des zweyten Verhältnisses größer als das zweyte: so ist auch BC > AC.

Dieses angenommen, schneide man aus CB ab CQ = AC, und ziehe ein gleiches Perpendikel CM auf CB. Auf die verlängerte MQ fälle man aus B ebenfalls das Loth BN, welches in O mit der mit CB parallel gezogenen Linie MO in O zusammenstößt. Auf diese ziehe man noch aus B das Perpendikel BP. Fig. 24.

Nun ist OP = PB: denn der Winkel CQM = 45° = NQB = NBQ = SBO = BOP; folglich auch PBO = 45°. Daher ist auch MO = BC + AC; wie BQ = BC — AC.

Es ist aber in den △△ QNB und MNO

MN:NQ = MO:BQ

d. i. weil NQ = BN, MN:BN = BC + AC:BC — AC.

Ferner, ist MN:BN = sin. tot.: tang. BMN

Und

BC + AC:BC — AC = tang. $\frac{1}{2}$(CAB + CBA):
tang. $\frac{1}{2}$(CAB — CBA) (§. 63)

also sin. tot.: tang. BMN = tang. $\frac{1}{2}$(CAB + CBA):
tang. $\frac{1}{2}$(CAB — CBA).

Aber BMN = CMB — CMQ = CMB — 45°, und CMB wird, indem man für CM AC sezt, aus der Proportion.

AC : BC = sin. tot. : tang. CMB

gefunden. Es ist also

sin. tot. : tang. (BMC — 45°) = tang. $\frac{1}{2}$ (CAB + CBA) : tang. $\frac{1}{2}$ (CAB — CBA).

folglich ist für den Sin. tot = 1, und für die Voraussetzung

tang. $\frac{1}{2}$(CAB — CBA) = tang. $\frac{1}{2}$(CAB + CBA). tang. (BMC — 45°)

Und für CB : AC substituirt das oben gefundene zweyte Verhältniß der Proportion, erhält man

sin. CDA . sin. CBD : sin. CAD . sin. CDB = 1 : tang. BMC,

folglich $\text{tang. BMC} = \frac{\text{sin. CAD . sin. CDB}}{\text{sin. CDA . sin. CBD}}$.

Setzt man aber sin. CAD . sin. CDB < sin. CDA . sin. CBD, folglich auch BC < AC: so ist

tang. $\frac{1}{2}$ (CBA — CAB) = tang. $\frac{1}{2}$ (CAB + CBA) . tang. (BMC — 45°).

Und unter derselben Voraussetzung auch

$$\text{tang. BMC} = \frac{\text{sin. CDA . sin. CBD}}{\text{sin. CAD . sin. CDB}}.$$

Aus jenen Gleichungen findet man nun CBA und CAB, d. i. den größeren und kleineren Winkel, folglich kann man nun auch die Seiten BC und AC

finden,

finden, und hieraus endlich die Seiten BD, CD im △ BCD.

Den Inhalt aber des Viereckes findet man aus der Summe des Inhaltes der Dreyecke ABC und BCD, welcher mittels der 3 gefundenen Seiten für jedes berechnet wird.

Beyspiel. Es sey AB gefunden = 81,914 Ruthen oder Fuß; ACB = 55°, ACD = 100°, CDA = 40°, CDB = 98°; also ist der W. CAD = 40°. Da man auch den W. BCD als gegeben oder gefunden betrachten muß: so sey derselbe 43°; folglich ist CBD = 180° — (98° + 43°) = 39°.

Demnach steht die Rechnung so

log. sin. CAD = 9,8080675
log. sin. CDB = 9,9957528

19,8038203 R

log. sin. CDA = 9,8080675
log. sin. CBD = 9,7988718

19,6069393 S

(R — S) + 10 = 10,1968810 = log. tang. BMC.

Hieraus findet man den W. BMC = 57° 33′ 47″ (ohne fortgesetzte Division wegen der Proportionaltheile). Daher BMC — 45° = 12° 33′ 47″, und ½ (BAC + ABC) = (180° — 55°): 2 = 62° 30′. Die Rechnung geht demnach so fort:

log. tang. $\frac{1}{2}$ (BAC + ABC) = 10,2835233
log. tang. (BMC — 45°) = 9,3375229

19,6210462
— log sin. tot. = — 10, . . .

9,6210462 = log. tang. $\frac{1}{2}$ (CAB — CBA)

folglich $\frac{1}{2}$ (CAB — CBA) = 22° 20′ 41″ beynahe.
Demnach ist der größere Winkel BAC = 84° 50′ 41″, und der kleinere W. ABC = 40° 9′ 19″.

Nun ist

sin. ACB : sin. ABC = AB : AC
oder log. sin. ABC = 9,8094563
log. AB = 1,9133581
+ arithm. Erg. log. sin. ACB = 0,0866355
log. AC = 11,8094499

folgl. AC = 64,483 beynahe.

Eben so ist

sin. ACB : sin. BAC = AB : BC
oder log. sin. BAC = 9,9982395
log. AB = 1,9133581
+ arithm. Erg. log. sin. ACB = 0,0866355
log. BC = 11,9982331

folglich BC = 99,594.

Ferner ist

sin. CDB : sin. CBD = BC : CD.
Oder log sin. CBD = 9,7988718
log. BC = 1,9982332
+ arithm.

+ arithm. Erg. log. sin. CDB = 0,0042472

log. CD = 11,8013522

folglich CD = 63, 292.

Auf gleiche Art findet man nun BD; nämlich

sin. BDC : sin. BCD = BC : BD

oder log. sin. BCD = 9,8337833

log. BC = 1,9982332

+ arithm. Erg. log. sin. BDC = 0,0042472

log. BD = 11,8362637

folglich BD = 68, 59.

Bedient man sich nun der Formel des §. 72. IV.: so erhält man a + b + c = 245,991; a + b — c = 117,025; a + c — b = 46,803; b + c — a = 82,163; wenn nämlich AB = a, AC = c, BC = b; folglich

log. (a + b + c) = 2,3909334

log. (a + b — c) = 2,0682787

log. (a + c — b) = 1,6702737

log. (b + c — a) = 1,9146763

durch 2 divid. 8,0441621

4,0220810

log. $\frac{1}{4}$ = — 0,6020600

3,4200210

Da nun diesem Logar. die Zahl 2631, 39 entspricht, so giebt uns diese den Flächenraum des

Dreyeckes ABC in □ Ruthen oder Fuß an, je nachdem AB angenommen ist.

In Ansehung des Dreyeckes BCD, wenn CD = a und BD = c, findet man a + b + c = 231,476; a + b − c = 94,296; a + c − b = 22,388; b + c − a = 104,892.

Folglich

log. (a + b + c) = 2,3645050
log. (a + b − c) = 1,9744933
log. (a + c − b) = 1,3500153
log. (b + c − a) = 2,0207424

durch 2 divid. 7,7097560

3,8548780
log. ¼ = − 0,6020600

3,2528180.

Hieraus hat man demnach den Flächenraum des Dreyeckes BCD = 1789,85 □ Ruthen oder Fuß.

Also Flächenraum des Viereckes ABCD = $\begin{bmatrix} 2631,39 \\ 1789,85 \end{bmatrix}$
= 4421,24 □ Ruthen oder Fuß.

§. 80.

Sind die Vierecke Parallelogramme: so erhellt, daß nach dem bisher Gesagten ihre Berechnung noch weniger Schwierigkeit mache; indem in jedem Parallelogramm die entgegengesetzten Winkel und Seiten, wie die Dreyecke gleich sind, in welche das

Paral-

Parallelogramm durch die Diagonale getheilt wird.

Beschränkt man sich also blos auf die Eintheilung der übrigen Polygone in Dreyecke, und auf die Berechnung dieser, um jene zu bestimmen: so lehren folgende zwey Aufgaben, die ich nur Beyspielweise hier anführe, daß für die einfachsten Fälle auch diese Figuren trigonometrisch leicht zu berechnen sind.

Aufg. 6. In dem Fünfecke ABCDE seyen gegeben drey aneinander liegende Seiten AB, BC, CD und vier Winkel am Umfange; folglich ist, weil, wenn n die Anzahl der Seiten bedeutet, 4Rn—4R die Summe aller innern Winkel ist*), auch der fünfte Winkel; man soll die übrigen Seiten und des Fünfeckes Inhalt finden. Fig. 25.

Aufl. Durch die aus A gezogenen geraden Linien wird das Fünfeck in drey Dreyecke getheilt, in welchen von den gegebenen Stücken wenigstens eines bekannt ist, die übrigen aber nach und nach gefunden werden können. Fig. 25.

So ist im Dreyecke ABC, AB und BC mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben. Daraus findet man

---

*) S. Schulz kurzen Lehrb. der arithmet. Geom. ꝛc. Lehrs. 39. S. 225.

man also die 2 übrigen Winkel mit der Seite AC. Aus dem gefundenen Winkel ACB weiß ich nun im 2ten Dreyecke ACD auch den Winkel DCA, weil der ganze Winkel C bekannt ist; da nun auch AC, CD bekannt sind: so können die 2 übrigen Winkel und AD gefunden werden. Man weiß folglich im 3ten Dreyecke ADE alle Winkel nebst der Seite AD; man kann folglich hieraus die Seiten DE und EA finden.

Aber aus dem Inhalte der einzelnen Dreyecke, welchen man nach den vorgetragenen Prinzipien leicht finden kann, resultirt der Inhalt des Fünfeckes; also ist die Auflösung vollständig.

§. 81.

Fig. 26. Aufg. 7. Es seyen im Sechsecke ABCDEF eine Seite AB und die Winkel gegeben, welche die an dieser Seite liegenden Seiten BC, AF, und die von ihren Endpunkten A, B aus gezogenen Diagonalen mit ihr einschließen; die übrigen Seiten, die Winkel am Umfange, und den Inhalt des Sechseckes zu finden.

Aufl. Durch die Diagonalen AD, AC, BF, BE und durch AE erhalten wir

1. vier Dreyecke AEB, ADB, AFB, ACB, in welchen außer der Seite AB auch die an AB liegenden Winkel bekannt sind, folglich können AF und BC, Seiten des Sechseckes, nach den bekannten Grundsätzen gefunden werden.

2. Eben daraus findet man auch die von A und B aus gezogenen Hülfslinien, und eben dadurch die übrigen Seiten des Polygons.

3. Da man, wenn man will, zugleich alle Winkel der Dreyecke berechnen kann: so hat man eben dadurch auch die Winkel an dem Umfange der Figur.

4. Um endlich den Inhalt der Dreyecke BCD, BDE, BEF, ABF, deren Summe den verlangten Flächenraum des Polygons giebt, zu haben, darf man nur nach der oben angegebenen Methode verfahren.

Zusatz. Würde man die Dreyecke vom Punkte A aus nehmen: so ist deutlich, daß man dann von dieser Summe, um den Inhalt des Sechseckes zu haben, den Flächeninhalt des Dreyeckes AFE abziehen müßte.

Anmerk=

Anmerkung. Zur leichtern Uebersicht der bisher angeführten Fälle und ihrer Auflösungsmethoden füge ich noch folgende Tabelle bey, welche die zur Berechnung ungleichseitiger Dreyecke nöthigen und bisher deduzirten Formeln enthält.

Die Bezeichnung hat den Sinn, wie §. 61 und §. 62; T bezeichnet den Inhalt des Dreyeckes.

Tabelle

Tabelle für die Resolution ungleichseitiger geradliniger Dreyecke.

Gegeben	gesucht	Auflösung durch die Gleichung.
c, A, C	B	$B = 2R - (A + C)$
	a	$a = \frac{c.\sin. A.}{\sin. C}$ §. 62.
	b	$b = \frac{c.\sin. B}{\sin. C}$; und unmittelbar
		$b = \frac{c.\sin.(A+C)}{\sin. C}$. (§. 74. 1)
b, A, C	B	$B = 2R - (A + C)$
	a	$a = \frac{b.\sin. A}{\sin. B}$,
	c	$c = \frac{b.\sin. C}{\sin. B}$ und unmittelbar
		$c = \frac{b.\sin. C}{\sin.(A+C)}$ (§. 74. 2)
a, b, A	B	$\sin. B = \frac{b.\sin. A}{a}$
	C	$C = 2R - (A + B)$ und unmittelbar
		$\text{tang.} \frac{1}{2} C = \frac{a.\cos. A \pm \sqrt{[(a + b.\sin. A)(a - b.\sin. A)]}}{(a+b).\sin. A}$ (§. 74. 4.)
	c	$c = \frac{a.\sin. C}{\sin. A}$ und unmittelbar nach §. 73.
		$c = b\cos. A \pm \sqrt{[(a + b.\sin. A)(a - b.\sin. A)]}$
b, c, A	B	$\text{tang.} \frac{1}{2}(B - C) = \frac{(b-c).\text{tang.} \frac{1}{2}(B+C)}{b+c}$ §. 63.
wo $b > c$	C	wo denn $\frac{1}{2}(B+C) + \frac{1}{2}(B-C) = B$ und $\frac{1}{2}(B+C) - \frac{1}{2}(B-C) = C$.
	a	$a = \frac{c.\sin. A}{\sin. C}$. Auch ist unmittelbar nach §. 64.
		$a = \sqrt{(b^2 + c^2 - 2bc.\cos. A)}$ und

Gegeben	gesucht	Auflösung durch die Gleichung.
		$\cot. C = \frac{b}{c \,.\, \sin. A} - \cot. A$ (§. 74. 3)
a, b, c	A	$\text{cos. } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$ §. 71.
	B	$\text{cos. } B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}$
	C	$C = 2R - (A + B)$
		Auch ist nach §. 72. 2) oder §. 68 $\sin. A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2\,bc}$
		$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{4\,bc}}$ §. 71.
		$\text{cos. } \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4\,bc}}$. §. 71.
a, b, c	T	$T = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$ §. 68, oder §. 72. 4.
b, c, A	T	$T = \frac{1}{2} b \,.\, c \,.\, \sin. A$. §. 77. Aufg. 2.
		Folgerungen.
b, A, T	c	$c = \frac{2\,T}{b \,.\, \sin. A}$ $= \frac{2\,T}{b} \,.\, \text{cosec. } A$. n. 29.
c, A, T	b	$b = \frac{2\,T}{c \,.\, \sin. A}$ $= \frac{2\,T}{c} \text{ cosec. } A$
a, B, C	T	$T = \frac{\frac{1}{2} a^2}{\cot. A \pm \cot. B}$ §. 78.

Sphärische Trigonometrie.

Einleitung von den Kugeldreyecken.

§. 82.

Erklär. Das sphärische oder Kugeldrey- Fig. eck ist derjenige Theil der Kugeloberfläche, welcher 87. von drey Bogen größter Kreise begränzt wird; z. B. das Dreyeck ADE. Die drey Bogen AD, DE, AE heißen die Seiten des sphärischen Dreyeckes; und die Wissenschaft, aus drey gegebenen oder gefundenen Stücken eines sphärischen Dreyeckes die übrigen zu berechnen, heißt sphärische Trigonometrie.

Schol. Daß selbst die Grundsätze der ebenen Trigonometrie eigentlich darum von den Astronomen erforscht wurden, um sich ihrer zur Berechnung der Dreyecke der Himmelskugel oder zur sphärischen Trigonometrie zu bedienen; habe ich schon oben §. 3. der allgem. Einl. gezeigt. Man sehe auch S. 512 der dort zitirt. Gesch. d. Math. v. Kästner. Eben davon zeigt die ganze Behandlung derselben. Nebst den Grundsätzen der ebenen Trigonometrie

stützt sie sich zunächst auf Sphärik, d. i. auf die genaue Kenntniß der Kugeldreyecke.

§. 83.

Erinnert man sich des Lehrsatzes der Stereometrie, daß die Kugel gleich ist einer einzigen Pyramide, welche die Oberfläche der Kugel zur Grundseite und den Halbmesser eben derselben zur Höhe hat, und seines Beweises: so sieht man auch ein, daß das sphärische Dreyeck als die Grundfläche einer dreyseitigen Pyramide kann betrachtet werden, deren Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist. Man denke sich nämlich drey Halbmesser AC, DC, EC aus den Winkeln des Dreyeckes in der Kugel Mittelpunkt gezogen; so enthalten diese Halbmesser mit den übrigen krummen Linien des Dreyeckes ein Stück der Kugel CAED, oder die genannte Pyramide, deren Grundfläche das Dreyeck ADE ist. Die krummen Seiten dieser Grundfläche, nämlich AE, AD, DE begränzen auf der Oberfläche der Kugel die Seitenflächen dieser Pyramide, ACE, ECD, DCA. — Ich werde zuletzt nochmals auf diese Vorstellungsart zurückkommen.

§. 84.

Lehrs. Der sphärische Dreyeckswinkel, den zwey Bogen machen, ist der Neigungswinkel ihrer Ebenen.

Beweis. Der zwischen jeden 2 Bogen AD, AE gebildete sphärische Winkel A wird gemessen durch den geradlinigen Winkel FAG, welcher von

den

den Tangenten AF und BG dieser Bogen gebildet wird.

Es fällt aber jede dieser Tangenten auf die Ebene des Bogens, zu welchem sie gehört, und ist senkrecht auf den Halbmesser CA, welcher der gemeinschaftliche Durchschnitt der von AE, und AD begrenzten Ebenen ACE und ACD ist. Folglich ist der sphärische Dreyeckswinkel DAE = FAG, d. i. der nämliche mit dem, welcher zwischen den von den Seiten AD, AE begrenzten Ebenen ACE, ACD enthalten ist; oder er ist der Neigungswinkel der Ebenen dieser Bogen.

Zusatz 1. Es haben also auch die von zusammenstossenden Bogen größter Kreise auf der Kugeloberfläche gebildeten Winkel die nämlichen Eigenschaften, wie die ebenen Winkel.

Diese Eigenschaften sind folgende:

1. Die zwey von einer auf die andere fallenden Ebene gebildeten Winkel machen zusammen 180° aus.

2. Von unendlich vielen ebenen Flächen gebildete und auf derselben Seite der Fläche liegende Winkel haben zusammen 360°.

3. Schneiden sich zwey Ebenen: so sind die am gemeinschaftlichen Durchschnitte entgegengesetzten Winkel einander gleich.

Zusatz 2. Daß die Seiten des sphärischen Dreyeckes eigentlich Winkel vorstellen, ist daraus klar, weil sie Bogen sind, welche die Winkel zwischen den Durchschnittslinien, worin eines jeden Ebene die Ebenen der beyden andern schneidet, messen. So ist der Bogen AE das Maß des Winkels ACE, oder des Winkels zwischen EC, CA, worin die Ebene AEB die Ebenen ECD und ADB schneidet.

§. 85.

Auch ist aus dem Gesagten leicht einzusehen, daß zwey Seiten eines Kugeldreyeckes auf einander senkrecht sind, wenn die Ebenen, die sie begrenzen, senkrecht auf einander stehen.

Man denke sich die zwey Ebenen ACD, ACE ins Unendliche verlängert; so ist klar, daß jeder Schnitt, welchen jede Ebene in der Kugel macht, ein größter Kreis ist, und daß sich diese 2 größten Kreise in den Punkten A und B des gemeinschaftlich verlängerten Durchschnittes halbiren. Denn da die 2 Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen: so haben sie einen Durchmesser der Kugel zum gemeinschaftlichen Durchschnitte.

Zusatz 1. Zwey Nebenseiten also, wie AD, AE eines sphärischen Dreyeckes ADE können sich in keinem größeren Abstande von ihrem Ursprunge an, als $180° = AEB = ADB$ begegnen.

Denn

Denn die zwey größten Kreise, wovon AE und AD Theile sind, können sich nur in den äußersten Punkten eines Kugeldurchmessers, folglich nur in einer Bogenweite von 180° schneiden.

Zusatz 2. Die Seiten folglich des sphärischen Dreyeckes, wie es hier betrachtet wird, als Bogen größter Kreise, sind alle kleiner, als 180°, oder sie sind höchstens halbe Kreise.

§. 86.

Lehrs. Es sey sowohl AK als AJ = 90°. Zieht man nun durch die Punkte J, K und C eine Fläche: so wird der Kreis JLMNJ, als der gemeinschaftliche Durchschnitt jener Fläche und der Oberfläche der Kugel, auf beyde Kreise AJB, AKB senkrecht seyn.

Beweis. Man ziehe die Halbmesser CJ und CK; so haben die Winkel ACJ, ACK die Bogen AJ, AK zum Maße; folglich sind sie rechte Winkel. Die Seite AC ist also auch senkrecht auf die 2 andern CK und CJ, folglich auch auf die durch ihre äußersten Punkte gezogene Fläche, d. i. auf die Kreisfläche JLMNJ.

Nun gehen aber die beyden größten Kreise AJB und AKB durch jenes Perpendikel AC oder AB; folglich sind sie auch senkrecht auf den Kreis JLMNJ; oder dieser ist umgekehrt senkrecht auf jene, was dasselbe ist.

Zusatz. Da wir kein bestimmtes Maß für den Winkel DAE oder KAJ voraussetzten: so erhellet, daß der Beweis gültig ist, wie groß auch immer jener Winkel seyn mag; daß folglich der Kreis JLMNJ senkrecht ist auf alle Kreise, die durch AB gehen.

§. 87.

Erklär. Die gerade Linie AB heißt die Axe jenes Kreises, und die äußersten Punkte A und B dessen Pole.

Zusatz 1. Es stehen also die Pole eines Kreises gleichweit ab von allen Punkten seines Umfanges; und der Abstand eines jeden Pols von einem dieser Punkte wird gemessen durch einen Bogen von 90°.

Und umgekehrt: wenn ein Punkt A der Kugeloberfläche von den Punkten J und K um einen größten Kreisbogen von 90° absteht: so ist A der Pol des durch diese zwey Punkte gehenden Kreises.

Zusatz 2. Es geht folglich ein jeder Bogen, oder dessen Verlängerung durch die Pole eines größten Kreises, sobald jener z. B. EJ senkrecht auf einem Bogen JK des größten Kreises aufsteht.

Zusatz 3. Sind zwey Bogen DK, EJ größter Kreise senkrecht auf den Bogen JK eines andern größten Kreises: so ist der Punkt A, in welchem jene beyden zusammenstoßen, der Pol dieses größten Kreises.

§. 88.

§. 88.

Lehrs. Das Maß eines sphärischen Winkels DAE ist der Bogen JK eines größten Kreises, welcher zwischen den Schenkeln des Winkels, oder ihrer Verlängerung, in einem Abstande von 90° vom Scheitel des Winkels liegt.

Beweis. CJ und CK sind senkrecht auf denselben Punkt C der geraden Linie AB, folglich ist der von ihnen gebildete Winkel JCK das Maß der Neigung der Flächen AJB und AKB oder des sphärischen Winkels DAE oder KAJ, folglich auch der Bogen KJ. (§. 84).

§. 89.

Wenn AFJGA und BFHGB die zwey größten Kreise sind, welche ein dritter Kreis ABDJHA senkrecht schneidet: so geht dieser dritte durch die Pole der zwey ersten, nämlich durch D und E, wenn LE und DK die zwey Axen vorstellen. (§. 87. Zus. 2.) Fig. 28.

Weil nun ACD und BCE rechte Winkel sind: so sind, wenn man von ihnen den gemeinschaftlichen Winkel BCD abzieht, die übrigbleibenden Winkel ACB und DCE gleich; folglich auch die Bogen AB und DE;

d. i. Der Bogen DE, welcher den kürzesten Abstand der Pole jener zwey größt-

en Kreise mißt, gleicht dem Bogen AB, welcher den kleinsten von zweyen Winkeln mißt, den beyde Kreise bilden.

§. 90.

Fig. 29. Erklär. Entgegengesetzte sphärische Dreyecke ABD und abd sind diejenigen, wovon das eine über dem andern unter dem größten Kreise DBd, das andere vor dem erstern hinter dem größten Kreise ADad liegt.

§. 91.

Lehrs. In entgegengesetzten sphärischen Dreyecken sind die homologen Seiten einander gleich.

Beweis. Denn man kann sich die Entstehung eines in der Kugel entgegengesetzten Dreyeckes so vorstellen:

Es sey das Dreyeck ABD gegeben. Man ziehe nach der Kugel Mittelpunkt C die Linien AC, DC; diese verlängere man man nun, bis Cd = CD, und aC = AC wird. Eben so ziehe man bC = BC. Zieht man noch die Bogen db, ba, da: so sieht man offenbar, daß ab = AB, ad = AD und bd = BD sey.

Auch ist der sphärische Winkel abd = ABD, bad = BAD, adb = ADB, weil, wenn man sich die Flächen z. B. ABCab, ADCdb gehörig verlängert denkt, diese Winkel immer vertikal entgegengesetzte, also gleiche Flächenwinkel werden.

§. 92.

§. 92.

Ehe ich die Eigenschaften der übrigen sphärischen Dreyecken darlege, muß ich zuvor nochmals eigends bemerken, daß, ungeachtet einzelne Theile eines sphärischen Dreyeckes mehr als 180° ausmachen können (wie unten folgen wird), hier doch nur solche Dreyecke in Betrachtung gezogen werden, deren jeder einzelne Theil weniger, als 180° hat; indem sich jene aus diesen erkennen oder bestimmen lassen.

So bilden z. B. die Bogen AJ, JLMP und AP ein sphärisches Dreyeck AJMP, in welchem offenbar der Bogen JLMP > 180° ist. Vollendet man nun diesen Bogen durch N bis JNPA, wo nun JP < 180° ist, statt des vorigen setzen. Fig. 27.

Denn die Theile dieses itzigen Dreyeckes sind theils gleich den Theilen des vorigen, theils sind sie die Supplemente zu 180° oder 360° von den Theilen des andern; so, daß folglich durch das eine Dreyeck auch das andere bekannt ist.

§. 93.

Lehrs. Jede Seite eines sphärischen Dreyeckes ist kleiner, als die Summe der zwey andern.

Beweis. Denn da bey der Voraussetzung §. 83 vergl. mit §. 84. Zus. 1. ebene Winkel, die in C eine Ecke machen, entstehen, deren Maße die

Seiten des sphärischen Dreyeckes sind, jede 2 ebene Winkel aber größer sind, als der dritte — nach stereometr. Grundsätzen *) —: so gilt dasselbe auch von den Seiten des sphärischen Dreyeckes.

§. 94.

Lehrs. Die Summe der drey Seiten eines sphärischen Dreyeckes ist immer kleiner als 360°.

Fig. 27. **Beweis.** Denn da $DE < AD + AE$ §. 93; aber $AD + AE$ mit $BD + BE$ verbunden, nicht mehr als 360° machen: so muß also $AD + AE$ mit DE verbunden weniger als 360° ausmachen.

§. 95.

Fig. 30. **Aufg.** Es sey ABC irgend ein sphärisches Dreyeck, man soll auf derselben Oberfläche der Kugel ein anders Dreyeck so beschreiben, daß jede Seite des Dreyeckes DEF das Supplement des ihm im Dreyecke ABC entgegenstehenden Winkels, und jeder Winkel des Dreyeckes DEF das Supplement der ihm im Dreyecke ABC entgegenstehenden Seite werde.

Aufg. Auf den Schenkeln des Winkels A nehme man $AG = AH = 90°$, und lege durch G, H einen größten Kreis EF.

Eben

*) Man sehe z. B. Lorenz Stereometrie §. 37.

Eben so nehme man auf den Schenkeln des Winkels B BJ = BK = 90°, und lege durch J, K den größten Kreis DF. — Endlich auf des Winkels C Schenkeln nehme man CR = CP = 90°, und lege durch R und P den größten Kreis DE.

Diese drey größten Kreise nun geben das Dreyeck DEF, welches das Gesuchte ist.

Beweis. Weil nach der Construktion der Punkt A der Pol des Bogens EF ist: so muß der Punkt E um 90° vom Punkte A abstehen. (§. 87. Zus. 1.) Aus demselben Grunde, weil C der Pol für DE ist, steht auch E von C 90° ab; folglich ist auch der Punkt E der Pol des Bogens AC.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß D der Pol von BC, und F der Pol von AB ist (§. 87. Zus. 2.).

Es ist folglich EG = 90° = FH; (§. 87. Zus. 1.) also EG + FH, oder EG + HG + GF, oder EF + GH = 980°. GH aber ist das Maß des Winkels A (§. 88); also ist EF + A = 180°, d. i. EF ist die Ergänzung von A.

Eben auf diese Weise erhellt, daß DE das Supplement des Winkels C, DF das Supplement von B ist.

2. Aus der Construktion ist AH = 90° = BJ; folglich AH + BJ, oder AH + AB + AJ, oder HJ + AB = 180°. HJ aber mißt den Winkel

F (§. 88); folglich F + AB = 180°. F ist also die Ergänzung des Bogens AB.

Auf gleiche Art wird bewiesen, daß E die Ergänzung von AC, und D die Ergänzung von BC ist.

Winkel also und Seiten in diesen so beschriebenen Dreyecken sind die wechselseitigen Ergänzungen von einander.

Zusatz 1. Die drey Winkel eines sphärischen Dreyeckes machen daher immer weniger; als 3. 180°, d. i. weniger, als 540° oder 6R aus. Folglich ist ihre halbe Summe > R und < 3R.

Denn die Summe der drey Winkel A, B, C mit der Summe der drey Seiten EF, DF, DE ist = 3. 180° (§. 95). Also muß sie erstens geringer seyn, als die Summe von 540°. 2. Weil die Summe der 3 Seiten EF, DF, DE kleiner ist, als 360° = 2. 180° (§. 94): so bleibt folglich für die Summe der Winkel A, B, C der immer 180° übersteigende Rest, wenn man von 3. 180°, welche Summe Winkel und Seiten ausmachen, weniger, als 2. 180° abzieht.

Zusatz 2. Es kann folglich ein sphärisches Dreyeck drey rechte und sogar drey stumpfe Winkel haben.

Ueberhaupt sind bey sphärischen Dreyecken alle Combinationen dreyer Winkel aus spitzigen, rechten, stumpfen Winkeln möglich.

Zusatz 3. Aus zwey bekannten Winkeln eines sphärischen Dreyeckes läßt sich daher nicht zugleich der dritte erkennen, wie sich dieses umgekehrt verhält bey geradlinigen Dreyecken, indem in diesen die Summe der drey Winkel völlig bestimmt ist.

Schol. Man hat sonst das sphärische Dreyeck, worin 2 rechte Winkel sind, triangulum birectangulum; das, welches wenigstens einen Winkel oder eine Seite von 90° hat, triang. quadrantale; dasjenige endlich, welches nur eine Seite oder einen Winkel von 90° hat, triang. simplex quadrantale genennt.

Wir nennen künftig das vorhin beschriebene Dreyeck DEF das Ergänzungs- oder Polardreyeck. Daß sich das Dreyeck ABC durch dieses DEF, oder letzteres durch das erstere auflösen lasse, brauche ich kaum noch anzumerken. Denn weiß man die Theile des Dreyeckes DEF; so weiß man auch eben dadurch die Theile des Dreyeckes ABC, weil jene Supplemente von diesen sind.

§. 96.

Lehrs. Sind in einem sphärischen Dreyecke zwey rechte Winkel: so sind die diesen Winkeln entgegenstehenden Seiten Quadranten und umgekehrt. In beyden Fällen aber ist die dritte Seite das Maß des gegenüberliegenden Winkels.

Fig. 27.

Beweis. Denn 1. wenn im Dreyecke AMK die Winkel AKM und AMK rechte sind: so ist A, als der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der Kreise AM, AK der Pol des Kreises KM, folglich sind AM und AK Quadranten (§. 87).

2. Sind aber AM, AK Quadranten: so sind die Winkel ACM und ACK rechte Winkel, folglich ist AC senkrecht auf die ganze Ebene KCM; folglich sind die Ebenen der Bogen AM, AK, die durch diese AC gehen, senkrecht auf die Ebene des Bogens KM; also sind AKM und AMK rechte Winkel.

3. In beyden Fällen aber, da A der Pol des Kreises KM ist, ist KM das Maß des dritten Winkels MAK (§. 88).

Zusatz 1. Wenn in einem sphärischen Dreyecke lauter rechte Winkel sind: so sind alle Seiten Quadranten, und umgekehrt. Denn da im ersten Falle jedes paar Winkel, irgend einem Paare Seiten entgegenstehend, rechte Winkel sind; so sind auch diese Seiten Quadranten, wie zuvor. Und da im 2ten Falle jedes Paar Seiten irgend einem Paare Winkel entgegensteht; so sind auch eben diese Winkel rechte.

Zusatz 2. Die Berechnung also solcher Dreyecke bedarf, da sie für sich erhellt, keiner trigonometrischen Grundsätze.

§. 97.

Lehrs. Zwey sphärischen Dreyecke auf derselben Kugeloberfläche, oder auf gleichen Kugeln beschrieben, sind einander gleich: 1) wenn sie eine an zwey einander wechselseitig gleichen Winkeln liegende gleiche Seite; 2) einen zwischen 2 einander wechselseitig gleichen Seiten liegenden Winkel gleich; 3) wenn sie drey Seiten wechselseitig gleich, und 4) wenn sie alle drey Winkel wechselseitig gleich haben.

Beweis. Dieser wird für 1. 2. 3. wie für die geradlinigen Dreyecke aus der Kongruenz geführt *). Weil aber in Betreff dieser der vierte Fall nicht gültig ist: so muß er für die sphärischen Dreyecke hier eigends bewiesen werden.

In den Dreyecken ABC, abc sey A = a, B = b, C = c; ihre Ergänzungsdreyecke seyn DEF, def. Figg 30, 31. Wegen der wechselseitigen Gleichheit der Winkel werden auch die Seiten EF, DF, DE als die Supplemente der Winkel des Dreyeckes ABC wechselseitig gleich seyn den Seiten ef, df, de, als den Supplementen der Winkel des Dreyeckes abc. Folglich werden beyde Dreyecke vermöge des dritten Falles vollkommen gleich seyn; daher werden die Winkel D, E, F und d, e, f wechselseitig gleich seyn; es müssen

*) Man sehe Karsten's Lehrb. 2ter Th. 1te Abtheil. §§. 511, 513, 517.

müssen daher auch die Supplemente der ersteren Winkel, nämlich AB, AC, BC wechselseitig gleich seyn den Supplementen der letztern Winkel d. i. den Seiten ab, ac, bc.

§. 98.

Tab. IV. Fig. 32. Lehrs. Zwey sphärischen Dreyecke ADE, ADe können zwey wechselseitig gleiche Seiten und einen gleichen Winkel D haben, welcher aber nicht zwischen den gleichen Seiten liegt;

2. Zwey sphärische Dreyecke ADE und Ade können eine Seite AE gleich der andern Ae, und zwey Winkel wechselseitig gleich haben D = d, AED = Aed, wovon aber einer den gleichen Seiten gegenübersteht, ohne daß die wechselseitige Gleichheit der übrigen Winkel und Seiten daraus folgt.

Beweis von I. Es sey aus den Seiten AD, AE, und aus dem Winkel D, welcher als als ein spitzer angenommen wird, ein sphärisches Dreyeck ADE zusammensetzt.

Man lege durch eine Seitenlinie AC eine Ebene senkrecht auf die Fläche, worinn DE ist. Man mache nun FE = eF und lege einen größten Kreis durch eAC. Auf diese Art hat man ein zweytes sphärisches Dreyeck ADE, welches den Winkel D und die Seite AD mit dem erst beschriebenen gemein hat.

Aber

Aber es ist auch die dem Winkel D gegenüberliegende Seite AE = Ae. Denn in den sphär. Dreyecken AeF, AEF ist AF gemeinschaftlich, bey F sind rechte Winkel (aus der Constr.) und EF = eF; als auch AE = Ae (§. 88). Also trift die erste Bedingung des Satzes bey Dreyecken zu, und doch ist, wie aus der Figur offenbar ist, die Seite De nicht gleich der Seite DE, weder der Winkel DAe gleich dem Winkel DAE. Endlich ist AED + AEF = 180°. Aber AEF = AeF, also AED + AeF = 180°; also kann AED nicht = AeF = Aed seyn, wenn nicht AF auf AE fällt, gegen die Voraussetzung.

Beweis von II. Es ist AED + AEF = 2R; eben so AeF + Aed = 2R; folglich AED + AEF = AeF + Aed. Aber AeF = AEF, folglich auch Aed = AED.

Ferner ist die Seite AE = Ae, und der Winkel ADE = Ade. Wir haben also 2 Dreyecke ADE und Ade, worinn eine Seite und 2 Winkel, wovon einer der beyderseits gleichen Seite gegenüber steht, wechselseitig gleich sind.

Aber dessen ungeachtet ist offenbar die Seite dA > DA; auch sind dAe und DAE, de und DE nicht nothwendig gleich, wie man leicht einsieht.

§. 99.

Lehrs. In einem gleichschenkligen sphärischen Dreyecke sind die an 2 gleichen Seiten liegenden Winkel gleich; und

2. wenn in einem sphärischen Dreyecke die Winkel an der Grundseite gleich sind: so ist es auch gleichschenklig.

Fig. 33. Beweis. a. Auf den gleichen Schenkeln AB, AC schneide man gleiche Bogen AD, AE ab, und ziehe die größten Kreisbogen DC und EB.

Es sind nun die Dreyecke ADC und AEB, weil sie einen gemeinschaftlichen Winkel zwischen 2 wechselseitig gleichen Seiten haben, gleich. Folglich ist auch der Bogen BE = DC; deshalb sind auch die Dreyecke BDC und BEC gleich. Denn nebst BE = DC haben sie BC gemeinschaftlich, und DB = EC, als gleiche Reste von gleichen Ganzen; folglich (§. 97. 4) ist auch der Winkel DBC oder ABC gleich dem Winkel ECB oder ACB.

Fig. 30. b. Der zweyte Theil des Satzes ist eine Folge des ersten, indem man sich das Ergänzungsdreyeck gezogen vorstellt. Denn wenn die Winkel B und C gleich sind: so sind auch die Supplemente DF und DE gleich; folglich ist das Dreyeck DEF ein gleichschenkliges, dessen Winkel E und F gleich sind, deren Ergänzungen zu 180° demnach auch gleich seyn müssen, d. i. AB = AC.

Zusatz. Auf gleiche Weise, wie in der Planimetrie bey diesem Falle, folgt auch hier, daß ein gleichseitiges sphärisches Dreyeck lauter gleiche Winkel, und ein gleichwinkliges lauter gleiche Seiten habe.

§. 100.

§. 100.

Lehrs. In jedem sphärischen Dreyecke steht eine größere Seite dem größeren Winkel entgegen, und umgekehrt.

Beweis. a. Wenn $B > A$: so kann man innerhalb des Dreyeckes ABC einen Bogen BD eines größten Kreises ziehen, welcher den Winkel ABD gleich macht dem Winkel BAD, und demnach $BD = AD$ ist (§. 99). Nun ist $BD + DC > BC$ (§. 93), also ist auch $AD + DC$ d. i. $AC > BC$. Fig. 34.

b. Der umgekehrte Fall läßt sich auf eine eben so leichte und analoge Art erweisen, wenn man das Ergänzungsdreyeck verzeichnet.

Scholion. Da man sich auch bey der Berechnung der sphärischen Dreyecke der Sinusse und Tangenten bedient, diese aber sowohl zu Bogen unter 90°, als zu ihren Supplementbogen gehören, folglich öfters eine Ungewißheit eintreten kann, welchen Werth man in bestimmten Fällen zu nehmen habe: so können die vorhergehenden Lehrsätze dienen, dieses Zweifelhafte zu entscheiden.

Allein dieser Nutzen wird aus ihnen nur für einige Fälle, bey weitem aber nicht in allen erhalten. Man muß daher noch mehrere Hülfssätze haben, wodurch man wissen kann, ob in einem bestimmten Falle ein Winkel oder eine Seite größer oder kleiner als 90° genommen werden müsse.

Diesen Dienst leisten unter andern die folgenden Lehrsätze.

§. 101.

Erklär. 1. Wenn gleich in einem sphärischen Dreyecke zwey, oder sogar drey rechte Winkel seyn können (§. 95. Zus. 2): so heißt uns doch nur dasjenige Dreyeck **rechtwinklig**, in welchem wir nur einen Winkel als rechten, folglich auch nur die diesem gegenüberstehende Seite als **Hypotenuse**, alle übrigen Winkel aber als schiefe Winkel betrachten. Die 2 Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, heißen die **Perpendikel**, oder die eine heißt **Perpendikel**, die andere **Grundlinie**.

Erklär. 2. Ein paar Winkel oder Bogen heißen **gleichartig** (ejusdem speciei), wenn beyde spitz oder beyde stumpf, d. i. beyde unter oder über 90° sind; im Gegentheile heißen sie **ungleichartig**.

In demselben Sinne heißt auch ein Bogen mit seinem gegenüberliegenden Winkel gleichartig oder ungleichartig.

§. 102.

Lehrs. In jedem rechtwinkligen Dreyecke ist jeder der schiefen Winkel gleichartig mit seinem ihm gegenüberstehenden Perpendikel.

Fig. 35.

Beweis. Man setze das Dreyeck ABC sey in B rechtwinklig, und BC sey $< 90°$. Man verlängere

längere dieß Perpendikel so, daß BD $= 90°$ wird. Der Punkt D wird nun der Pol des Bogens AB. Zieht man folglich den Bogen eines größten Kreises DA auf der Seite BA Endpunkt A: so ist jener auf diese senkrecht, folglich DAB ein rechter Winkel, daher ist CAB $< 90°$, d. i. mit BC gleichartig.

Auf ähnliche Art werden die 2 andern Fälle bewiesen.

§. 103.

Lehrs. Wenn 2 Seiten oder 2 Winkel eines rechtwinkligen sphärischen Dreyeckes ABC gleichartig sind: so wird die Hypotenuse AC immer $< 90°$ seyn.

2. Im Gegentheile aber, wenn die 2 Seiten oder Winkel ungleichartig sind: so wird die Hypotenuse $> 90°$ seyn.

3. Endlich wird diese ein Quadrant seyn, wenn ein an ihr liegender Winkel ein rechter ist.

Beweis. a. Es sey BC $< 90°$ und auch AB $< 90°$; eben so der Winkel ACB $< 90°$; folglich ist ACD $> 90°$, deshalb $>$ ADC; folglich ist AD $>$ AC (§. 100). Nun ist aber AD $= 90°$, also ist die Hypotenuse AC $< 90°$.

b. Eben so, wenn BC und AB, d. i. jedes Perpendikel $> 90°$; so ist die Hypotenuse AC $< 90°$. Fig. 36.

Denn man nehme BD $= 90°$: so ist D der Pol von AB, folglich DA $= 90°$. Weil nun AB $> 90°$: so ist der Winkel ACB stumpf (§. 102),

daſſelbe gilt vom Winkel ADB; folglich iſt ADC $< 90°$, demnach $>$ ACD, alſo iſt auch AC $<$ AD, d. i. AC $< 90°$.

Fig. 35. II. Wenn im Gegentheile AB $< 90°$, BC $> 90°$: ſo wird der Winkel ACB $< 90°$ (§. 102), desgleichen der Winkel AEB. Folglich iſt AEC $> 90°$, demnach $>$ ACE; deshalb iſt auch AC $>$ AD, d. i. AC $> 90°$.

c. Weil nun die Winkel ſich gerade ſo verhalten, wie die Seiten: ſo gelten jene Beweiſe auch in Rückſicht der an der Hypotenuſe liegenden Winkel.

Da endlich der dritte Theil des Satzes aus dem Geſagten von ſelbſt erhellet: ſo iſt der Beweis vollſtändig.

Zuſatz. Dieſe Sätze laſſen ſich auch umgekehrt beweiſen. Nämlich iſt die Hypotenuſe entweder $<$ oder $> 90°$: ſo ſind die Perpendikel entweder beyde ſpitz, oder beyde ſtumpf, oder das eine ſpitz, das andere ſtumpf. Daſſelbe Verhältniß hat ſtatt unter den Winkeln.

2. Sind die Hypotenuſe und eine Seite gleichartig: ſo iſt das andere Perpendikel entweder $<$ oder $> 90°$. Daſſelbe gilt von dem dieſem Perpendikel entgegenſtehenden Winkel.

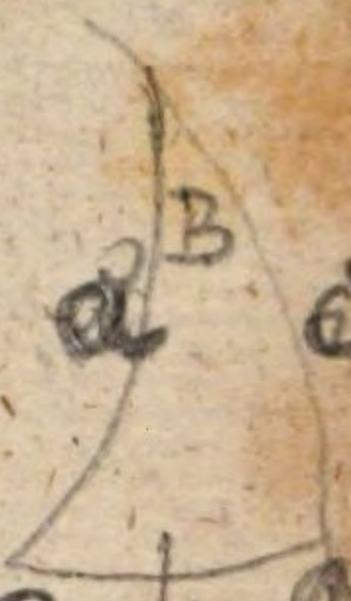
§. 104.

Das in beyden letzten §§. Geſagte läßt ſich folgendermaßen darſtellen, wenn a die Hypotenuſe,

b die Grundlinie, B ihren gegenüberliegenden Winkel, wie C den dem andern Perpendikel c entgegenstehenden Winkel, Q einen Quadranten, R den rechten Winkel bedeutet:

I. Ein Winkel	so ist das entgegenstehende
an a, d. i. B oder C	b oder c des sphär. rechtw. Drey.
R	Q
<R	<Q
>R	>Q

und umgekehrt.



II. Wenn der W. an a oder	die Seiten c, b	so ist a
Einer ein rechter	Eine = R oder Q	Q
beyde gleichartig	beyde gleichartig	<Q
beyde ungleichartig	beyde ungleichartig	>Q:

und umgekehrt.

§. 105.

Lehrs. Wenn im schiefwinkligen sphärischen Dreyecke die Winkel, welche an derjenigen Seite, worauf, oder auf deren Verlängerung das Perpendikel fällt, liegen, gleichartig sind: so fällt letzteres innerhalb des Dreyeckes; sind sie ungleichartig, außerhalb.

Beweis. Man setze auf einen größten Kugelkreis ADBEA als auf eine Grundfläche einen größten Halbkreis ACB senkrecht. Durch einen Punkt C des letztern, als den Endpunkt eines Bogens <Q, lege man 2 andere größten Kreise Fig. 37.

DCd und ECe schief, so, daß sie nach A zu bey D, d, E, e spitze, nach B zu aber stumpfe Winkel mit dem Grundkreise machen.

Diesem nach wird AC<Q, CB>Q (§. 104. I). Sind die beyden letztern Kreise so gelegt, daß AD, AE < Q ist: so sind auch CD und CE < Q, weil sie mit AC gleichartig (§. 104. II).

Es ist ferner Be = AE, und Bd = AD, indem es gleiche Theile entgegengesetzter Kugeldreyecke sind (§§. 90, 91.). Folglich ist auch Be, Bd < Q; aber BC > Q (aus der Constr.); also ist wegen dieser Ungleichartigkeit Cd und Ce > Q (§. 104. II).

Die schiefen Kreise Dd, Ee geben 4 sphärische Dreyecke: 1) zwey, nämlich CDE = a, deC = b, die an der Grundlinie gleichartige, nämlich a spitze, b stumpfe, Winkel haben. Innerhalb eines jeden fällt die senkrechte Kreislinie ACB; das spitze AC innerhalb des an der Grundlinie spitzwinkligen, der stumpfe Theil CB innerhalb des an der Grundlinie stumpfwinkligen Dreyeckes.

2) Die zwey andern Dreyecke DeC = c und CdE = d haben am Grunde ungleichartige Winkel; in c ist der Winkel D > R, e < R, in d ist der Winkel an E > R, an d < R. Die senkrechte Kreisfläche fällt außerhalb dieser beyden Dreyecke, und CB ist mit dem nächsten Winkel derselben ungleichartig, weil es mit seiner Ergänzung nach §. 104. I. gleichartig seyn muß.

Zu-

Zusatz. Man sieht ein, daß CA immer das Perpendikel werden würde, wenn auch die Dreyecke c und d für sich gegeben wären.

Anmerk. Ich habe diesen directen Beweis von diesem Satze, wie ihn Mönnich in seinem Lehrb. d. Mathem. I. Th. 2ten Abth. §. 198. 2te Aufl. liefert, dem indirekten anderer Mathematiker *) vorgezogen.

Der sphärischen Trigonometrie

Erster Abschnitt.

Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Dreyecke.

§. 106.

Lehrs. In jedem sphärischen Dreyecke verhalten sich die Sinusse der Winkel, wie die Sinusse der gegenüberstehenden Seiten.

Beweis. Es sey das sphärische Dreyeck ABD, C der Mittelpunkt der Kugel, und AC, BC, DC drey Halbmesser. Man fälle von des Winkels A Scheitel, das Perpendikel AP auf die Fläche der entgegengesetzten Seite BD; und durch Fig. 38.

dieses

*) Z. B. Karsten im §. 540. des oben angef. Lehrb.

dieses Loth AP ziehe man 2 Flächen APF und APE, so, daß die Halbmesser BC und DC resp. senkrecht auf diese Flächen sind.

Nun sind die Linien AE und PE, als Durchschnittslinien der 2 Flächen ABC und DCB, mit der Fläche APE senkrecht auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie BC jener beyden Flächen; es drückt daher der Winkel AEP die Neigung beyder Flächen ABC und BDC zu einander aus; er ist also gleich dem sphärischen Winkel ABD (§. 84).

Aus demselben Grunde ist der Winkel AFB gleich dem sphärischen Winkel ADB.

Dieß vorausgesetzt ist nach §. 61. da AEP und AFP rechtwinklige geradlinige Dreyecke sind:

$$r : \sin.\ AEP = AE : AP$$

$$\text{und } \sin.\ AFP : r = AP : AF$$

$$\text{also } \sin.\ AFP : \sin.\ AEP = AE : AF$$

Aber es sind die Linien AE, AF aus dem äußersten Punkte der Bogen AB, AD senkrecht auf die Halbmesser BC, CD, welche durch die andern Endpunkte derselben Bogen gehen, gezogen; folglich sind sie die Sinusse dieser Bogen; demnach ist

$$\sin.\ ADB : \sin.\ ABD = \sin.\ AB : \sin.\ AD.$$

Auf ähnliche Art zeigt man auch, daß ist

$$\sin.\ ADB : \sin.\ BAD = \sin.\ AB : \sin.\ BD.$$

Zusatz. Ist einer der sphärischen Winkel ein rechter: so hat man, weil sein Sinus dem Halbmesser gleich ist, die Proportion: Der Halbmesser verhält sich zum Sinus der Hypotenuse, wie der Sinus einer der schiefen Winkel zum Sinus seiner entgegenstehenden Seite.

§. 107.

Lehrs. In jedem rechtwinkligen sphärischen Dreyecke verhält sich der Halbmesser zum Sinus eines der Perpendikel, wie die Tangente des an dieser Seite liegenden schiefen Winkels zur Tangente der ihm gegenüberliegenden Seite.

Beweis. C sey der Kugel Mittelpunkt, und D der rechte Winkel. Vom Endpunkte A der Seite AD fälle man auf den Halbmesser DC das Loth AF, und durch dieses lege man die Fläche AFE so, daß auf sie der Halbmesser BC senkrecht ist. Fig. 39.

Es ist daher der Winkel AEF, als Neigungswinkel der Ebenen ACE und FCE gleich dem sphärischen Winkel BAD. Auch sind CEF (weil diese Ebene durch CE geht) und die Ebene AEF auf einander senkrecht; und weil die zwey Flächen CDA und CDB der Voraussetzung gemäß senkrecht aufeinander sind: so ist die Linie AF, die lothrecht ist,

auf

auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt BC, auch senkrecht auf die Fläche CDB, und folglich auch auf die gerade Linie FE.

Man hat also durch den senkrechten Schnitt von CE drey rechtwinklige Dreyecke FAC, FEC, AEC.

Dieses vorausgeschickt, gilt für das rechtwinklige Dreyeck ACF die Proportion:

CF : FA = r : tang. FCA,

und für AFE AF : EF = tang. FEA : r.

---

also CF : EF = tang. FEA : tang. FCA.

oder CF : EF = tang. ABD : tang. AD.

Nun ist ferner für das rechtwinklige Dreyeck FEC

CF : FE = r : sin. FCE,

oder CF : FE = r : sin. BD.

Diese zwey letzten Analogien verglichen, hat man also

r : sin. BD = tang. ABD : tang. AD.

Eben so ist r : sin. AD = tang. BAD : tang. BD.

§. 108.

Lehrs. In jedem sphärischen rechtwinkligen Dreyecke verhält sich der Halbmesser zum Cosinus eines der beyden Winkel an den Perpendikeln, wie die Tangente der Hypotenuse zur Tangente des an jenem Winkel liegenden Perpendikels.

Beweis. Im rechtwinkligen Dreyecke ACE (§. 107) ist

CE : AE = r : tang. AB (wie §. 107).

im rechtw. Drey. CEF CE : EF = r : tang. BD

AE : EF = tang. AB : tang. BD.

Im rechtw. Drey. AEF AE : EF = r : cos. ABD (nach §. 106.)

---

also r : cos. ABD = tang AB. tang. BD.

Nehme ich nun das andere Perpendikel, und folglich auch seinen anliegenden Winkel: so ist auch

r : cos. BAD = tang. AB : tang. AD.

Zusatz. Weil die Cotangenten sich umgekehrt verhalten wie die Tangenten, indem $\cot \alpha = \frac{1}{\text{tang. } \alpha}$.

n. 20.: so ist

r : cos. ABD = cot. BD : cot. AB;

und r : cos. BAD = cot. AD : cot. AB.

§. 109.

Lehrs. In jedem sphärischen rechtwinkligen Dreyecke ABC, wenn man die beyden Seiten AC, AB, die einen der schiefen Winkel einschließen, so verlängert, daß BD sowohl als AE 90° wird; Fig. 40.

die Endpunkte D und E aber durch den Bogen DE eines größten Kreises verbindet: so wird man nun ein neues in E rechtwinkliges Dreyeck DEC haben, dessen Theile entweder gleich den entsprechenden Theilen des vorigen Dreyeckes ABC, oder die Ergänzungen zu 90° sind.

Beweis. Man verlängere die Seiten AB und DE bis sie sich in F begegnen. Weil nun BD = 90°, und auf AB senkrecht ist: so ist der Punkt D der Pol des Bogens AB (§. 87. Zus. 2); also ist DF = 90° (ebend.) und senkrecht auf AF. Eben so muß der Bogen, der den Abstand des Punktes A von D mißt, nämlich DA = 90° seyn. (§. 87. Zus. 1.).

Da folglich A von den Punkten D und E des größten Kreisbogens DEF, indem man AE = 90° gemacht hat, eben so weit absteht: so ist A der Pol für DF; also ist AE senkrecht auf DE, folglich ist CDE ein rechtwinkliges Dreyeck in E.

Dieses vorausgesetzt ist 1) der Winkel E gleich dem Winkel B; der Winkel DCE = ACB (§. 84. Zus. 3.); 2) die Seite DC ist das Complement von BC; die Seite DE das Complement von EF, als des Maßes des Winkels A; CE das Complement von AC; endlich 3) weil der Winkel D den Bogen BF, d. i. die Ergänzung des Bogens AB zum Maße hat: so ist D die Ergänzung von AB.

Zu-

Zusatz. Dasselbe zeigt man, wenn man nach oben die Seiten fortzieht, und nun das Dreyeck AHJ bildet.

§. 110.

Der vorige Lehrsatz §. 109 zeigt deutlich, daß man nicht nöthig habe, das Dreyeck ABC unmittelbar zu berechnen; sondern daß man die vorhin bewiesenen Lehrsätze vorerst auf die Complementair-dreyecke CED oder AHJ anwenden könne. Denn sind drey Stücke im Dreyecke ABC gegeben: so weiß man auch z. B. von CED die drey Correspondirenden; und durch drey gesuchte Stücken aus diesem, weiß man auch die entsprechenden aus jenem, welche gesucht werden sollten.

Noch ist zu merken, daß dieß derselbe Fall bleibt, wenn gleich die Seiten AB, AC, oder AC, BC, wie wir sie vorhin annahmen, nicht kleiner als 90° wären, oder die eine $>$, die andere $<90°$ wäre, wie z. B. im Dreyecke FBC. Statt dieses Dreyeckes dürfte man nur das andere ABC berechnen, dessen Bogen nur bis 180° verlängert sind, um aus den bekannten Stücken dieses das Gesuchte für das Dreyeck FCB zu haben Fig. 41.

Indessen bedarf man auch dieses Hülfsmittels nicht immer, indem die im 106ten §. bewiesene Proportion allgemein gilt, die Größe der Seiten sey unter oder über 90°.

§. 111.

Wir wollen nun wirklich nach §. 109 die in den vorhergehenden Lehrsätzen bewiesenen Proportionen auf das Ergänzungsdreyeck CDE anwenden, um diejenigen Analogien zu erhalten, welche zur Auflösung rechtwinkliger sphär. Dreyecke dienen.

Nach §. 106. Zus. ist r : sin. CD = sin. D : sin. CE

folgl. in Ansehung d. Drey. ABC I. r : cos. CB = cos. AB : cos. AC.

Nach §. 107. ist r : sin. DE = tang. D ; tang. CE

also II. r : cos. A = cot. AB : cot. AC,

wie wir diese Formel auch aus §. 108 erhielten;

oder r : cos. A = tang. AC : tang. AB.

Nach §. 106. Zus. ist r : sin. CD = sin. C : sin. ED

also III. r : cos. CB = sin. ACB : cos. A

Endlich r : sin. CE = tang. DCE : tang. DE

also IV. r : cos. AC = tang. ACB : cot. A.

Nehmen wir nun zu diesen 4 Analogien die 2 obigen, nämlich:

V. r : sin. AC = sin. A : sin. BC §. 106.

VI. r : sin. CB = tang. C : tang. AB §. 107.

so

so haben wir 6 Proportionen, nach welchen, als nach eben so vielen Gesetzen alle einfachen Fälle für rechtwinklige sphär. Dreyecke aufgelöst werden können.

Denn, weil der rechte Winkel bekannt ist, werden immer nur 2 Stücke gegeben, und ein drittes daraus gesucht. Daher 3 Glieder der Frage:

a. 3 Seiten nach I.

b. 2 Seiten und ein Winkel, nämlich

α) 2 Perpendikel und 1 Winkel nach VI.

β) Hypotenuse, Perpendikel und

a) der gegenüberligende Winkel nach V.

b) der anliegende Winkel nach II.

c. 1 Seite und 2 Winkel, nämlich

1) Perpendikel und 2 Winkel nach III.

2) Hypotenuse und 2 Winkel nach IV.

Mit Hülfe also einer jeden dieser Proportionen könnte man eigentlich drey, folglich mittels aller zusammen 18 Probleme lösen. Da es aber in der I. und II. bey der Hypotenuse und 2 Perpendikeln oder 2 Winkeln gleichgültig ist, welcher von beyden gesucht werde: so haben wir 2 weniger, folglich in Allem 16 Aufgaben nach diesen Gesetzen zu solviren.

Anmerkung. Ich habe indessen eine Tafel beygefügt für die Resolution aller möglichen Fälle in zu berechnenden rechtw. sphär. Dreyecken, die 16 Fälle aber mit einem Sternchen bezeichnet.

§. 112.

Man sieht übrigens aus §. 104 leicht ein, warum überhaupt, wenn in einem sphärischen rechtwinkligen Dreyecke einer der schiefen Winkel nebst der Gegenseite gegeben ist, die übrigen Größen des Dreyeckes zweifelhaft bleiben, ob sie nämlich $>$ oder $< 90°$ seyen; wiewohl die beyden möglichen Werthe allemal zusammen $180°$ ausmachen.

In diesen zweifelhaften Fällen müssen die Bedingungen der Aufgabe entscheiden. In allen übrigen Fällen entscheiden die algebraischen Zeichen nach der Lehre der trigonometrischen Funktionen.

Nämlich unter der Voraussetzung, daß kein Stück eines sphärischen Dreyeckes über $180°$ sey, gilt, um zu bestimmen, ob das Gesuchte $<$ oder $> 90°$ sey, folgende **allgemeine Regel:**

Ist das Gesuchte, oder das vierte Glied der Proportion ein Sinus: so kann der Bogen, zu dem er gehört, größer oder kleiner als $90°$ seyn; den Fall ausgenommen, wenn sich, da das Dreyeck ein rechtwinkliges ist, unter den drey bekannten Stücken eines befände, welches dem Gesuchten im Drey-

ecke

Tabelle für die Auflösung aller möglichen Fälle in rechtwinkligen sphärischen Dreyecken.

Es sey ABC Fig. 40. das Dreyeck. Man nenne die Hypotenuse AC = a; die Perpendikel AB = b, BC = c; die ihnen gegenüberliegenden Winkel seyen resp. wieder A, B, C.

Gegeben	Gesucht	Anzustellende Proportion	Entscheidung, ob das Gesuchte $< 90°$ sey.
I. a, C	c	r : sin. a = sin. C : sin. c	wenn $C < 90°$
	b	r : cos. C = tang. a : tang. b	
		oder	
	B	cos. C : r = cot. a : cot. b cos. a : r = cot. C : tang. B.	{ wenn a und C gleichartig.
II. a, c	C*	sin. a : r = sin. c : sin. C.	wenn $c < 90°$
	B*	cot. c : cot a = r : cos. B	
		oder	
	b*	tang. a : r = tang. c : cos. B cos. c : r = cos. a : cos. b	{ wenn a und c gleichartig
III. B, c	a*	r : cos. B = cot. c : cot. a	wenn B und c gleichartig
	b*	r : sin. c = tang. B : tang. b	wenn $B > 90°$
	C*	r : cos. c = sin. B : cos. C	wenn $c < 90°$
IV. B, b	a	sin. B : sin. b = r : sin. a	{ zweifelhaft
	c	tang. B : tang. b = r : sin. c	
	C	cos. b : r = cos. B : sin. C	
V. C, c	a*	sin. C : sin. c = r : sin. a	{ zweifelhaft
	b*	tang. C : tang. c = r : sin. b	
	B*	cos. c : r = cos. C : sin. B	

Gegeben	Gesucht	Anzustellende Proportion	Entscheidung, ob das Gesuchte $< 90°$ sey.
VI. C, b	a c B	r : cos. C = cot. b : cot. a r : sin. b = tang. C : tang. c r : cos. b = sin. C : cos. B	wenn C und b gleichartig wenn $C < 90°$ wenn $b < 90°$
VII. B, a	b* c* C*	r : sin. a = sin. B : sin. b cos B : r = cot. a : cot. c oder r : cos. B = tang. a : tang. c r : cos. a = tang. B : cot. C	wenn $B < 90°$ wenn a und B gleichartig
VIII. a, b	c C B	cos. b : cos. a = r : cos. c cot. b : cot. a = r : cos. C sin. a : r = sin. b : sin. B	wenn a und b gleichartig wenn $b < 90°$
IX. b, c	a* B* C	r : cos. c = cos. b : cos. a sin. c : r = tang. b : tang. B sin. b : r = tang. c : tang. C	wenn b und c gleichartig wenn $b < 90°$ wenn $c < 90°$
X. B, C	a* b c*	tang. B : cot. C = r : cos. a sin. C : cos. B = r : cos. b sin. B : cos. C = r : cos. c	wenn B und C gleichartig wenn $B < 90°$ wenn $C < 90°$

ecke entgegenstünde. Denn in diesem Falle sind diese 2 letztern Stücke gleichartig. (§. 102).

Ist aber das 4te Glied ein Cosinus oder eine Tangente oder Cotangente: so muß man dem Halbmesser, wie allen Sinussen ohne Unterschied, und allen Cosinussen, Tangenten, Cotangenten von Bogen, die $< 90°$, das Zeichen $+$ geben; das Zeichen $-$ gebe man aber allen Cosin. Tang. Cot. von Bogen die $> 90°$ (§. 18.). Am Ende, wenn die Anzahl der Zeichen $-$ o oder eine gerade Zahl ist: so ist der zum 4ten Gliede der Proportion gehörige Bogen immer $< 90°$; ist aber im Gegentheile die Anzahl der Zeichen $-$ ungerade: so ist jener Bogen $> 90°$.

§. 113.

Um nun einige Anwendung von der im vorigen §. gegebenen allgemeinen Regel zu machen, führe ich nach den Hauptproportionen (§. 111) sechs Fälle an.

A. $r : \cos. BC = \cos. AB : \cos. AC$ nach I.

Hier ist nun, wenn der Halbmesser wieder $= 1$ gesetzt wird,

entweder $\pm \cos. BC . \pm \cos. AB = + \cos. AC$,

also $AC < 90°$

oder $\mp \cos. BC . \pm \cos. AB = - \cos. AC$;

also $AC > 90°$.

Eben so erkennt man in $\frac{\text{cos. AC}}{\text{cos. BC}} = \text{cos. AB}$

und in $\frac{\text{cos. AC}}{\text{cos. AB}} = \text{cos. BC}$ aus der Gleichheit oder Ungleichheit der Zeichen, daß in jenem Falle AB und BC $< Q$ oder $< 90°$, in diesem $> Q$ sind.

Auch aus §. 104. II., weil man weiß, von welcher Art die gegebenen Stücke AB, BC sind, entscheidet sich dieses ohne Zweydeutigkeit.

B. Daß dieses, wie zuvor, derselbe Fall sey mit II (§. 111) ist daraus klar, weil die Cotangenten, wie die Cosinusse im zweyten Quadranten negativ werden.

C. 1 : cos. BC = sin. ACB : cos. A nach III.

Hieraus hat man drey Gleichungen 1) $\text{cos. A} = \text{cos. BC . sin. ACB}$; 2) $\text{sin. ACB} = \frac{\text{cos. A}}{\text{cos. BC}}$; 3) cos.

$$\text{BC} = \frac{\text{cos. A}}{\text{sin. ACB}}.$$

Weil nun sin. ACB im ersten wie im zweyten Quadr. positiv ist: so ist A in 1) gleichartig mit dem gegebenen BC. Aber bey 2) erhellt schon aus der möglichen Beysetzung verschiedener Zeichen, daß ACB zweydeutig bleibt. Eben diese Zweydeutigkeit, ob der Winkel $>$ oder $< 90°$ sey, erhellt aus §. 98. 2., indem A der gegebenen Seite BC gegenüberliegt.

3)

3) ist aber wieder unzweydeutig; indem, wie es auch die Zeichen schon geben, BC mit dem gegebenen A gleichartig ist nach §. 104. I.

D. 1 : cos. AC = tang. ACB : cot. A nach IV.

Hieraus entstehen die Gleichungen 1) cot. A = cos. AC . tang. ACB; 2) tang. ACB $= \frac{\text{cot. A}}{\text{cos. AC}}$;

3) cos. AC $= \frac{\text{cot. A}}{\text{tang. ACB}}$.

Versucht man bey diesen drey Gleichungen die Zeichen wieder: so findet man sogleich, daß in allen nichts zweydeutiges bleibt; so ist z. B.

$\frac{\pm \text{cot. A}}{\pm \text{tang. ACB}} = +\text{cos. AC}$, und $\frac{\pm \text{cot. A}}{\pm \text{tang. ACB}} = -\text{cos. AC}$ u. s. w.

Eben dieß erkennt man aus §. 104. II.

E. 1 : sin. AC = sin. A : sin. BC. V.

Der allgemeinen Regel zu Folge sieht man vorerst klar, daß jederzeit das Glied der Gleichung, dessen Werth man sucht, positiv sey; eben so ist auch die Größe desselben unzweydeutig in den Gleichungen sin. BC = sin. AC . sin. A, und sin. A = $\frac{\text{sin. BC}}{\text{sin. AC}}$; indem A und BC gleichartig sind.

Aber in der Gleichung $\text{sin. AC} = \frac{\text{sin. BC}}{\text{sin. A}}$ bleibt die Größe AC zweifelhaft; indem ich mir ein anderes Dreyeck denken kann, wo außer dem rechten Winkel auch $a = A$, und $bc = BC$, und dennoch AC, ac ungleich sind. §. 98. 2.

F. 1 : sin. BC = tang. C : tang. AB . VI.

Hier ist nun 1) tang. AB = sin. BC . tang. C; weil nun AB mit C gleichartig seyn muß, indem C an der Hypotenuse AC liegt (§. 104. I.): so weiß man die bestimmte Beschaffenheit von AB aus dem gegebenen C. 2) $\text{sin. BC} = \frac{\text{tang. AB}}{\text{tang. C}}$.

Aus dem nur so bey E zuletzt Gesagten ist klar, daß auch hier BC zweydeutig gelassen wird. Wendete man auch hier wieder die allgemeine Regel an: so wäre, wenn C spitz ist, in 1) + sin. CB . + tang. C = + tang. AB, also AB < Q; wenn C stumpf: + sin. BC — tang. C = — tang. AB, also AB > Q. In 2) ist, weil C und AB gleichartig seyn müssen, $\frac{\pm \text{ tang. AB}}{\pm \text{ tang. C}} = + \text{sin. BC}$; aber BC, wie gesagt, zweifelhaft.

Endlich 3) ist $\frac{\pm \text{ tang. AB}}{+ \text{ sin. BC}} = \pm \text{ tang. C}$, d. i. wenn AB < Q: ist C < R; wenn AB > Q: ist C > R.

§. 114.

Beyspiele.

I. Beysp. Es sey die Hypotenuse a und ein Perpendikel c gegeben, den diesem entgegenstehenden Winkel C zu finden; und zwar sey $a = 61^\circ\ 4'\ 56''$; $c = 40^\circ\ 30'\ 20''$ d. i. 1) spitz. Die Proportion zur Resolution findet sich unter II in der obigen Tabelle; mittels der Logarithmen hat man aus ihr

10 + log. sin. c — log. sin. a = log. sin. C

oder 10 + log. sin. $40^\circ\ 30'\ 20''$ = 19,81125937

+ arithm. Erg. log. sin. $61^\circ\ 4'\ 56''$ = 0,0578359

19,8704296

Also $C = 47^\circ\ 54'\ 21''$ spitz, weil c und C gleichartig seyn müssen (§. 104. I).

2) Es sey $c = 120^\circ$ d. i. stumpf, und a = 100. Daher 10 + log. sin. 120° = 19,9375306

+ arithm. Erg. log. sin. 100° = 0,0066485

19,9441791

Woraus $C = 61^\circ\ 34'\ 6''$ gefunden wird; aber weil aus dem angeführten Grunde C itzt stumpf seyn muß: so ist $C = \begin{matrix} 179^\circ & 59' & 60'' \\ -61 & 34 & 6 \end{matrix} = 118^\circ\ 25'\ 54''$.

II. Beysp. Es sey ein Perpendikel b mit seinem gegenüberstehenden Winkel B gegeben; man sucht die Hypotenuse a; es sey $b = 15^\circ\ 17'$, und $B = 23^\circ\ 42'$.

Dieser Fall findet sich in IV der Tabelle, woraus also ist

log. sin. a = 10 + log. sin. b — log. sin. B
oder log. sin. 15° 17′ = 9,4209330
+ 10,....
+ arithm. Erg. log. 23° 42′ = 0,3958304

19,8167634

Demnach a = 40° 59′
= 139° 1′

je nachdem die Bedingungen im bestimmten Falle es erheischen. (§. 113. E).

III. Beyspiel, wodurch die Anwendbarkeit der zur Resolution rechtwinkliger Kugeldreyecke gegebenen Prinzipien und Formeln deutlich erhellet.

Es sollen die Seiten des in A rechtwinkligen Fig. 42. Kugeldreyeckes a die Länge von der Sonne λ, c ihre gerade Aufsteigung α, b die Abweichung der Sonne δ vorstellen; ferner ε bedeute die Schiefe der Ekliptik, φ den Winkel der Ekliptik mit der Mittagsfläche.

Setzt man nun wieder den Halbmesser = 1: so geben die Analogien der obigen Tabelle zur Vergleichung der Theile dieses Dreyeckes untereinander folgende 10 Formeln oder Gleichungen:

I. $\sin. \delta = \sin. \lambda \sin. \varepsilon$

II. $\cot. \lambda = \cot. \alpha \cos. \varepsilon$

III. $\text{tang}. \delta = \text{tang}. d . \sin. \alpha$

IV. $\cos. \lambda = \cos. \alpha . \cos. \delta$

V. $\cot. \varphi = \cos. \lambda . \text{tang}. \varepsilon$

VI. $\sin. \alpha = \sin. \lambda . \sin. \varphi$

VII. $\text{tang}. \delta = \text{tang}. \lambda . \cos. \varphi$

VIII. $\text{tang}. \alpha = \text{tang}. \varphi . \sin. \delta$

IV. $\cos. \varphi = \cos. \alpha . \sin. \varepsilon$

V. $\cos. d = \cos. \delta . \sin. \varphi.$

Da nun bey diesen 10 Gleichungen aus zweyen allemal das dritte gefunden wird: so kommen überhaupt 30 Aufgaben bey gegenwärtigem Dreyecke vor.

Von diesen mögen nur zwey als Beyspiele hier stehen:

Aufg. 1. Man soll die Abweichung der Sonne $= \delta$ aus ihrer Länge $= \lambda$, und der dermaligen Schiefe der Ekliptik ε finden.

Die Gleichung zur Auflösung ist unter I enthalten. Es sey nun $\lambda = 3$ Zeichen $3^\circ\ 29'\ 50''$ oder $39^\circ\ 29'\ 50''$; $\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 58''$: so ist

$$\sin. \delta = \sin. 93^\circ\ 29'\ 50''. \sin. 23^\circ\ 27'\ 58''$$

oder $\sin. \delta = \cos. 3^\circ\ 29'\ 50''. \sin. 23^\circ\ 27'\ 58''$

daher log. cos. $3^\circ\ 29'\ 50'' = 9{,}9991905$

$+$ log. sin. $23^\circ\ 27'\ 58''$ — log. r $= \underline{9{,}6001084 - 10}$

also log. sin. $\delta = 9{,}5992989.$

Daraus

Daraus findet man positiv $\delta = 23^\circ\ 25'\ 11''$ Abweichung der Sonne, und zwar nach astronomischen Grundsätzen nördliche.

Aufg. 2. Der Winkel der Ekliptik mit dem Meridian d. i. φ vermittels der Länge der Sonne $= \lambda$ und der Schiefe der Ekliptik $= \varepsilon$ zu finden.

Hievon zeigt V. die

Auflösung, wobey aber zu merken, daß dieser Winkel negativ oder westlich, wenn die Sonne im niedersteigenden Zeichen, oder im 2ten und 3ten Quadranten der Ekliptik ist, positiv aber oder östlich, wenn λ in den 1sten oder 4ten Quadranten fällt. — Es sey nun, wie zuvor $\lambda = 93^\circ\ 29'\ 50''$. $\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 58''$. Hier ist folglich $\cos. \lambda = -\sin. 3^\circ\ 29'\ 50''$,

daher $\cot. \varphi$ westlich $= \sin. 3^\circ 29' 50''. \tang. \varepsilon$

oder $\log. \sin. 3^\circ 29' 50'' = 8{,}7853309$

$\log. \tang. \varepsilon - \log. r = 9{,}6375990 - 10$

$\log. \cot. \varphi = 8{,}4229299$

also $\varphi = 88^\circ\ 28'\ 59''$.

Der

Der sphärischen Trigonometrie

Zweyter Abschnitt.

Berechnung der schiefwinkligen Kugeldreyecke.

§. 115.

Die Berechnung schiefwinkliger Kugeldreyecke ist mehreren Schwierigkeiten unterworfen, als die der rechtwinkligen. Jede Aufgabe bey diesen foderte nur eine einzige Proportion oder Gleichung, da man in mehreren Fällen in Ansehung der erstern mehrere Proportionen anstellen muß, um das Gesuchte zu erhalten, auf eine ähnliche Art, wie bey der Berechnung schiefwinkliger geradliniger Dreyecke. Denn, wie es bey diesen öfters der Fall war, ein Perpendikel zu fällen, eben so gibt es bey der Resolution gegenwärtiger Dreyecke verschiedene Fälle, wo man sich eben dieses Hülfsmittels bedienen muß. Indessen suchren auch hier wieder die Mathematiker solche Formeln ausfindig zu machen, wodurch man wenigstens in einigen Fällen des Perpendikelziehens überhoben würde.

Uebrigens muß man sich in Ansehung dieses Umstandes dessen erinnern, was schon im §. 105 bewiesen worden, daß nämlich ein größter Kreisbogen, aus einem Winkel senkrecht auf die gegenüberstehende Seite gezogen, innerhalb des Dreyeckes fällt, wenn die zwey an dieser Seite liegenden Winkel gleichartig, außerhalb aber, wenn sie ungleichartig sind.

Wir gehen nun zu der Aufstellung der Prinzipien für die Berechnung schiefwinkliger sphärischer Dreyecke fort.

Zwey derselben sind schon in den §§. 95, 106 dargethan.

§. 116.

Lehrs. Zieht man im schiefwinkligen Kugeldreyecke einen größten Kreisbogen aus einem Winkel senkrecht auf die diesem Winkel entgegenstehende Seite: so verhalten sich die Cosinusse der dadurch entstehenden Abschnitte dieser Seite, wie die Cosinusse der entsprechenden oder anliegenden Seiten des Dreyeckes, d. i. wenn ABD dieses Dreyeck, AE der größte auf die Seite BD senkrechte Kreisbogen, und BE, ED diese Segmente sind: so gilt

Fig. 43.

$$\text{cos. BE} : \text{cos. ED} = \text{cos. AB} : \text{cos. AD}.$$

Beweis. Es sey C der Kugel Mittelpunkt. Man fälle aus des Winkels A Spitze auf die Fläche des Bogens BD das Loth AJ; dieses wird in der Fläche ACE des Bogens AE liegen. Durch AJ denke man sich nun die beyden Flächen AJG, AJF so gelegt, daß die Halbmesser CB, CD resp. auf sie senkrecht werden. Aus E ziehe man endlich die Lothe EA, EK auf dieselben Halbmesser.

Dieser Construktion gemäß sind die Dreyecke CJG, CHE, indem sowohl JG als EH auf dasselbe BC senkrecht ist, ähnlich. Eben so ist △ CEK ∽ △ CJF. Es ist also

$$CH : CG = CE : CJ$$
$$\text{und } CK : CF = CE : CJ;$$

folglich $CH : CG = CK : CF$

Nun ist aber CH der Cosinus von BE; CG der Cosinus von AB; CK der Cosinus von DE, CF der Cosinus von AD; also ist, wenn man die Analogie zugleich alternirt, die im Lehrsatze ausgedrückte Proportion gültig.

§. 117.

Lehrs. Unter derselben Voraussetzung, wie im vorigen Satze, verhalten sich auch die Sinusse der Abschnitte, wie die Cotangenten der anligenden Winkel;

d. i. sin. BE : sin. DE = cot. B : cot. D.

Beweis. Aus dem Beweise §. 106 ist ersichtlich, daß der Winkel AGJ = B, und AFJ = D; folglich, weil in den rechtwinkligen Dreyecken AJG, AJF die Winkel GAJ, FAJ die Ergänzungen zu 90°, oder die Complemente von den Winkeln AGJ, AFJ sind: so sind dieselben auch die Ergänzungen von B und D; daher sind auch die Tangenten von GAJ und FAJ die Cotangenten von B und D.

Dieses vorausgesetzt, ist im Dreyecke AJG, welches in J rechtwinklig ist.

$$r : \left\{ \begin{matrix} \text{tang. GAJ} \\ \text{cot. B} \end{matrix} \right\} = AJ : JG.$$

Eben so ist im rechtwinkligen Dreyecke AJF

$$\left\{ \begin{matrix} \text{tang. FAJ} \\ \text{cot. D} \end{matrix} \right\} : r = JF : AJ;$$

folglich $\text{cot. D} : \text{cot. B} = JF : JG.$

Nun ist das Dreyeck CJF ähnlich dem Dreyecke CKD, und auch $\triangle CEJ \backsim \triangle CEH$; also ist

$$JF : EK = CJ : CE$$
$$\text{und } GJ : EH = CJ : CE;$$

daher $JF : GJ = EK : EH.$

Also auch $\text{cot. D} : \text{cot. B} = EK : EH.$

EK aber und EH sind die Sinusse der Segmente ED, EB; also ist, was zu beweisen war,

$$\text{cot. B} : \text{cot. D} = \text{sin. EB} : \text{sin. ED.}$$

§. 118.

§. 118.

Lehrs. Im schiefwinkligen Kugeldreyecke verhält sich die Tangente der halben Seite, worauf, oder auf deren Verlängerung das vom gegenüberliegenden Winkel gefällte Perpendikel fällt, zur Tangente der halben Summe der zwey andern Seiten des Dreyeckes, wie die Tangente ihres halben Unterschiedes zur Tangente des halben Unterschiedes oder der halben Summe der Abschnitte, je nachdem das Perpendikel innerhalb oder außerhalb des Dreyeckes fällt.

Beweis. Nach §. 37. ist im Dreyecke ABC, Fig. wo das aus A auf BC gefällte Loth innerhalb des 44. Dreyeckes fällt,

$$\text{cos. AB} : \text{cos. AC} = \text{cos. BD} : \text{cos. CD}$$

und nach algebr. Grundsz. $\text{cos. AB} + \text{cos. AC} : \text{cos. AB} - \text{cos. AC} = \text{cos. BD} + \text{cos. CD} : \text{cos. BD} - \text{cos. CD}$.

Aber nach §. 30 ist

$$\text{cos. AB} + \text{cos. AC} : \text{cos. AB} - \text{cos. AC} = \text{cot.} \tfrac{1}{2}(\text{AC} + \text{AB}) : \text{tang.} \tfrac{1}{2}(\text{AC} - \text{AB})$$

Aus demselben Grunde

$$\text{cos. BD} + \text{cos. CD} : \text{cos. BD} - \text{cos. CD} = \text{cot.} \tfrac{1}{2}(\text{CD} + \text{BD}) : \text{tang.} \tfrac{1}{2}(\text{CD} - \text{BD}).$$

Diese Proportionen verglichen, und die Glieder zugleich alternirt, hat man

$$\text{cot.} \tfrac{1}{2}(\text{AC} + \text{AB}) : \text{cot.} \tfrac{1}{2}(\text{CD} + \text{BD}) = \text{tang.} \tfrac{1}{2}(\text{AC} - \text{AB}) : \text{tang.} \tfrac{1}{2}(\text{CD} - \text{BD});$$

folglich nach n. 20 und weil CD + BD = BC,

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}BC : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC+AB) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC-AB) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(CD-BD).$$

Weil aber nach Fig. 45, wo das Perpendikel außerhalb ABC fällt, CD — BD = BC ist: so wird das letzte Glied obiger Proportion tang. $\frac{1}{2}$ BC; folglich gilt in diesem Falle

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}BC : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC+AB) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC-AB) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(CD+BD).$$

Zusatz 1. Es ist also überhaupt:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}BC : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC+AB) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC-AB) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(CD \mp BD),$$

wo nämlich — gelten muß, wenn das Loth innerhalb, + aber, wenn es außerhalb des Dreyeckes fällt.

Zusatz 2. Es ist auch aus der vorigen Proportion

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}BC : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC+AB) = \text{cot.}\tfrac{1}{2}(CD \mp BD) : \text{cot.}\tfrac{1}{2}(AC-AB)$$

od. $\text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC+AB) : \text{cot.}\tfrac{1}{2}(AC-AB) = \text{tang.}\tfrac{1}{2}BC : \text{cot.}\tfrac{n}{2}(CD \mp BD)$;

wo man denn die eine oder die andere Proportion brauchen kann.

§. 119.

Die bisher für die Berechnung schiefwinkliger Dreyecke aufgestellten Proportionen oder Formeln, welche wir durch geometrische Constructionen und Demonstrationen eben so, wie die nöthigsten For-

meln für die Resolution geradliniger Dreyecke, bewiesen haben, könnten auch theils mit Hülfe der Formeln für die Resolution rechtwinkliger Kugeldreyecke, (indem das schiefwinklige Kugeldreyeck durch das gefällte Loth allzeit in zwey rechtwinklige Dreyecke getheilt wird,) theils durch die obigen Formeln für die trigonometrischen Funktionen deduzirt werden. Von dieser Deduktionsweise sollen im nächsten §. noch Beyspiele folgen.

Ungeachtet nun nicht zu leugnen ist, daß die bisher entwickelten Proportionen oder Gleichungen schon allein bey dem ordinären Gebrauche zureichen, die schiefwinkligen Kugeldreyecke, oder aus drey gegebenen Stücken ihre drey übrigen zu berechnen: so haben doch die Mathematiker nichts Ueberflüssiges unternommen, wenn sie noch mehrere Formeln in jener Hinsicht aufstellten; indem man mittels dieser bald schneller, bald sicherer zum Ziele kömmt, als mittels der Erstern.

Indessen müssen diejenigen, welche sich einzig der bisher gelieferten Formeln in vorkommenden Fällen bedienen wollen, 1) die Formeln, welche in der obigen für die Resolution rechtwinkliger Kugeldreyecke verfertigten Tabelle enthalten sind, gut inne haben; 2) sich erinnern, daß die Sinusse, Tangenten u. s. w. eines Winkels oder Bogens dieselben sind für die Supplemente eben dieser Bogen; 3)

bemerken, daß die Anwendung der für die Resolution schiefwinkliger Dreyecke in diesem Abschnitte gegebenen Regeln nicht nothwendig ist, sobald eine Seite eines solchen Dreyeckes ein Quadrant ist.

Denn in diesem Falle läßt sich allzeit ein rechtw. sphär. Dreyeck bestimmen, woraus jenes zu berechnen ist. Wenn z. B. $BC = 90°$: so ist Fig. 44 $CD = 90° - BD$; $DAC = 90° - BCD$; oder Fig. 45 $BD = DC - 90°$; $DAB = DAC - 90°$.

Ich merke noch an, daß ich unten die 6 Hauptfälle, worauf die Berechnung gegenwärtiger Kugeldreyecke zurückegeführt werden kann, angeben und zeigen werde, wie man sie bloß mittels der nun deduzirten Proportion auflösen könne.

§. 120.

Es wird nicht undienlich seyn, hier vorerst eine Uebersicht der Formeln als eben so vieler Gesetze für die Berechnung schiefwinkliger Kugeldreyecke zu geben.

Figg 44, 45.

I. $\sin. A : \sin. C = \cos. BC : \cos. AB$ (§. 106)

II. $\cos. BD : \cos. CD = \cos. AB : \cos. AC$ (§. 116)

III. $\sin. BD : \sin. CD = \cos. B : \cot. C$ (§. 117)

oder $\sin. CD : \sin. BD = \tang. B : \tang. C$.

und $\sin. CD : -\sin. BD = -\tang. B : \tang. C$, nach Fig. 45 in welcher ABC stumpf, und C spitzig ist (§. 115) und BD eine entgegengesetzte Lage hat.

IV. tang. $\frac{1}{2}$BC : tang. $\frac{1}{2}$(AC + AB) = tang. $\frac{1}{2}$(AC-AB)
: tang. $\frac{1}{2}$(CD $\mp$ BD) (§. 118),

Oder dafür

V. tang. $\frac{1}{2}$ (AC + AB) : cot. $\frac{1}{2}$ (AC — AB) =
tang. $\frac{1}{2}$ BC. cot. $\frac{1}{2}$ (CD $\mp$ BD) (§. 118. Zuſ. 2.)

Es iſt ferner nach (§. 111. II.)

r : cos. BAD = tang. AB : tang. AD
cos. CAD : r = tang. AD : tang. AC

VI. alſo tang. AC : tang. AB = cos. BAD : cos. CAD.

Auch iſt nach (§. 111. III)

r : cos. AD = ſin. m : cos. B
r : cos. AD = ſin. n : cos. C.

VII. alſo ſin. m : ſin. n = cos. B : cos. C,
für Fig 45 ſin. CAD : — ſin. DAB = cos. C : — cos. B.

Aus der vorigen Proportion wird nach algebr. Grundſätzen für Fig. 44.

ſin. m + ſin. n : ſin. m — ſin. n = cos. B + cos. C
: cos. B — cos. C.

Aber ſin. m + ſin. n : ſin. m — ſin. n = tang. $\frac{1}{2}$(m + n)
: tang. $\frac{1}{2}$ (m — n) (§. 54. n. 92)

und cos. B + cos. C : cos. B — cos. C = cot. $\frac{1}{2}$(B — C)
: tang. $\frac{1}{2}$ (B + C) (§. 54. n. 93).

VIII. alſo cot. $\frac{1}{2}$ (B — C) : tang. $\frac{1}{2}$ (B + C) =
tang. $\frac{1}{2}$(m + n) : tang. $\frac{1}{2}$(m — n).

oder 1 : tang. $\frac{1}{2}$ (B + C) . tang. $\frac{1}{2}$ (B — C) =
tang. $\frac{1}{2}$(m + n) : tang. $\frac{1}{2}$(m — n) . n. 20.

Ferner ist für den Fall, wo beyde Winkel B, C gleichartig, d. i. entweder beyde stumpf oder beyde spitz sind, nach Fig. 44.

tang. CD = tang. AC. cos. C (§. 111. II.)

und sin. BD = sin. (BC — CD) = sin. BC. cos. CD
— cos. BC. sin. CD (§. 47. n. 58).

Alles durch sin. CD dividirt, erhält man

$$\frac{\text{sin. BD}}{\text{sin. CD}} = \frac{\text{sin. BC}}{\text{tang. CD}} - \text{cos. BC (§. 37. nn. 20, 21).}$$

Setzt man für tang. CD den gefundenen Werth, und für $\frac{\text{sin. BD}}{\text{sin. CD}}$ den Werth aus III: so hat man

$$\frac{\text{tang. C}}{\text{tang. B}} = \frac{\text{sin. BC.}}{\text{tang. AC. cos. C}} - \text{cos. BC;}$$

oder, wenn man diese Gleichung durch tang. B . tang. AC . cos. C multiplizirt,

tang. AC . sin. C = sin. BC . tang. B — cos. BC . tang. AC . cos. C . tang. B . n. 16.

Hieraus wird

$$\text{IX. tang. B} = \frac{\text{tang. AC . sin. C}}{\text{sin. BC} - \text{cos. BC . tang. AC . cos. C}}$$

$$= \frac{\text{sin. C}}{\text{sin. BC. cot. AC} - \text{cos. BC. cos. C}} \text{. n, 20.}$$

$$\text{Oder cot. B} = \frac{\text{sin. BC. cot. AC}}{\text{sin. C}} - \text{cos. BC . cot. C. n. 21.}$$

$$X.\ \text{tang. } AC = \frac{\text{sin. } BC \,.\, \text{tang. } B}{\text{sin. } C + \text{cos. } BC \,.\, \text{cos. } C \,.\, \text{tang. } B}$$

$$= \frac{\text{sin. } BC}{\text{sin. } C \,.\, \text{cot. } B + \text{cos. } BC \,.\, \text{cos. } C}.$$

$$\text{Oder cot. } AC = \frac{\text{sin. } C \,.\, \text{cot. } B}{\text{sin. } BC} + \text{cos. } C \,.\, \text{cot. } BC.$$

Wollte man eben diese Gleichung zwischen zwey Seiten BC, AC und zwey Winkeln B, C, wenn C von den Seiten eingeschlossen ist, für Fig. 45 finden: so sieht man leicht, daß, weil nun sin. BD = sin. (CD—BC) ist, man vollkommen dieselben Gleichungen nur mit verwechselten Zeichen erhalten werde.

Zusatz. Wollte man aus der zuletzt entwickelten Gleichung den eingeschlossenen Winkel C mittels der übrigen Größen suchen: so müßte man cos. C durch sin C ausdrücken; weil aber dadurch irrationelle Größen zum Vorscheine kommen, wie aus den Werthen für cos. C §. 35 ersichtlich ist: so müßten dann diese durch Quadriren hinweggeschafft werden. Folglich erhielte man dann sin. C als die Wurzel einer quadratischen Gleichung, und zwar in zwey Werthen, weil sich unter den angegebenen Bedingungen zwey verschiedene Dreyecke verzeichern lassen. So können AB, AC und C in Figg. 44, 45 gleich seyn, und doch ist der eingeschlossene Winkel A in dem einen die Summe, in dem andern Dreyecke der Unterschied zweyer Winkel m und n.

§. 121.

§. 121.

Auf eine ähnliche Art findet man eine Gleichung zwischen den drey Seiten eines Kugeldreyeckes und einem Winkel.

Nämlich nach (§. 111. II) ist wieder

$$\text{tang. BD} = \text{tang. AB} \cdot \text{cos. B}$$

Ferner ist $\text{cos. CD} = \text{cos.(BC} - \text{BD)} = \text{cos. BC} \cdot \text{cos. BD} + \text{sin. BC} \cdot \text{sin. BD}$ (§. 47. n. 61), folglich durch cos. BD alles dividirt, ist

$$\frac{\text{cos. CD}}{\text{cos. BD}} = \text{cos. BC} + \text{sin. BC} \cdot \text{tang. BD}$$ n. 16.

Setzt man für das erste Glied seinen Werth aus (§. 120. II) und den vorhin gefundenen Werth für tang. BD: so erhält man

$$\frac{\text{cos. AC}}{\text{cos. AB}} = \text{cos. BC} + \text{sin. BC} \cdot \text{tang. AB} \cdot \text{cos. B}$$

oder

XI. $\text{cos. AC} = \text{cos. BC} \cdot \text{cos. AB} + \text{sin. BC} \cdot \text{sin. AB} \cdot \text{cos. B.}$

Hieraus ist

XII. $$\text{cos. B} = \frac{\text{cos. AC} - \text{cos. BC} \cdot \text{cos. AB}}{\text{sin. BC} \cdot \text{sin. AB}}$$

Zusatz. Wollte man auch hier wieder eine Seite als die Unbekannte aus der Gleichung suchen: so würde man für sie aus demselben Grunde, wie vorher für C, zwey Werthe finden.

§. 122.

§. 122.

Um eine Gleichung zwischen den drey Winkeln und einer Seite zu finden, bedient man sich der Theile des Winkels A.

Nach §. 111. IV) ist

$$\text{cot. CAD} = \text{cos. AC . tang. C;}$$

aber $\text{sin. BAD} = \text{sin. (A} - \text{CAD)} = \text{sin. A . cos. CAD} - \text{sin. CAD . cos. A.}$ n. 58.

Oder $\frac{\text{sin. BAD}}{\text{sin. CAD}} = \text{sin. A . cot. CAD} - \text{cos. A.}$ n. 21.

Setzt man für das erste Glied der Gleichung den Werth aus §. 120. VII); so auch den Werth für cot. CAD: so hat man

$$\frac{\text{cos. B}}{\text{cos. C}} = \text{sin. A . cos. AC} - \text{cos. A;}$$ also

XIII. $\text{cos. B} = \text{cos. AC . sin. C. sin. A . cos. A. cos. C.}$

Hieraus ist auch

XIV. $\text{cos. AC} = \frac{\text{cos. B} + \text{cos. A . cos. C}}{\text{sin. C. sin. A}}$.

Zusatz. Daß sin. A, wenn man diesen Winkel finden wollte, einen doppelten Werth habe, ist aus dem oben Gesagten klar.

§. 123.

Aus I. §. 120 wird, wenn man nur B für A, folglich auch AC für BC nimmt

$\text{sin. B} + \text{sin. C : sin. B} - \text{sin. C} = \text{sin. AC} + \text{sin. AB}$
$: \text{sin. AC} - \text{sin. AB;}$

also

XV. tang. $\frac{1}{2}$(B+C):tang.$\frac{1}{2}$(B-C)=tang.$\frac{1}{2}$(AC+AB)
: tang. $\frac{1}{2}$(AC—AB) (§. 54. n. 92.).

Aus III wird

sin. CD + sin. BD : sin. CD — sin. BD = tang. B + tang. C : tang. B — tang. C

oder tang. $\frac{1}{2}$ (CD + BD) : tang. $\frac{1}{2}$ (CD — BD) =
sin. (B + C) : sin. (B — C) (§. 56. n. 104)

oder, um diese Formel mit der vorigen verbinden zu können,

XVI. sin. $\frac{1}{2}$(B+C) . cos. $\frac{1}{2}$(B+C) : sin. $\frac{1}{2}$(B—C)
. cos. $\frac{1}{2}$ (B — C) = tang. $\frac{1}{2}$ (CD + BD)
: tang. $\frac{1}{2}$(CD—BD). n. 109.

Aus VI wird

tang. AC + tang. AB : tang. AC — tang. AB =
cos. BAD + cos. CAD : cos. BAD — cos. CAD.

Also nach §. 56. n. 104 und nach §. 54. n. 93. hat man

XVII. $\left\{\begin{array}{l} \text{sin.(AC+AB) : sin.(AC—AB)} \\ \text{sin. }\frac{1}{2}\text{(AC+AB).cos.}\frac{1}{2}\text{(AC+AB)} \\ \text{:sin. }\frac{1}{2}\text{(AC—AB)cos.}\frac{1}{2}\text{(AC—AB} \end{array}\right\}$ = 1.tang. $\frac{1}{2}$(BAD + CAD) . tang. $\frac{1}{2}$(CAD—BAD).

Aus II wird

cos. BD + cos. CD : cos. BD — cos. CD =
cos. AB + cos. AC : cos. AB — cos. AC,

und hieraus

XVIII. tang. $\frac{1}{2}$(CD+BD) : tang. $\frac{1}{2}$ (CD — BD) =
tang. $\frac{1}{2}$(AC+AB) : tang. $\frac{1}{2}$(AC—AB)

Aus

Aus VII wird

$$\sin.CAD + \sin.BAD : \sin.CAD - \sin.BAD = \cos.C + \cos.B : \cos.C - \cos.B,$$

und hie aus

XIX. $\text{tang.}\frac{1}{2}(CAD + BAD) : \text{tang.}\frac{1}{2}(CAD - BAD) = 1 : \text{tang.}\frac{1}{2}(B+C).\text{tang.}\frac{1}{2}(B-C).$

§. 124.

Um bequemere Formeln, als die §. 120. X. zu finden, mittels welcher man durch leichte Rechnung aus zwey Winkeln mit der eingeschlossenen Seite die zwey übrigen suchen könne, multiplizire man mit einander die ersten sowohl als 2ten Glieder folgender drey Gleichungen:

a) $\text{tang.}\frac{1}{2}(B+C).\text{tang.}\frac{1}{2}(AC-AB) = \text{tang.}\frac{1}{2}(B-C).\text{tang.}\frac{1}{2}(AC+AB)$ aus XV.

b) $\sin.\frac{1}{2}(B+C).\cos.\frac{1}{2}(B+C).\text{tang.}\frac{1}{2}(CD-BD) = \sin.\frac{1}{2}(B-C).\cos.\frac{1}{2}(B-C).\text{tang.}\frac{1}{2}(CD-BD)$ aus XVI.

c) $\text{tang.}\frac{1}{2}(AC+AB).\text{tang.}\frac{1}{2}(AC-AB) = \text{tang.}\frac{1}{2}(CD+BD).\text{tang.}\frac{1}{2}(CD-BD)$ aus XVIII.

Nun kann man 1) aus beyden Gliedern der so erhaltenen Gleichung sowohl $\text{tang.}\frac{1}{2}(AC+AB)$, als $\text{tang.}\frac{1}{2}(CD-BD)$ als gemeinschaftliche Faktoren weglassen; 2) ist $\text{tang.}\frac{1}{2}(B \pm C).\cos.\frac{1}{2}(B \pm C) = \sin.\frac{1}{2}(B \pm C)$ nach §. 54. n. 88.

Man hat also

$$\sin.\tfrac{1}{2}(B+C)^2.\text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC-AB)^2 = \sin.\tfrac{1}{2}(B-C)^2.\text{tang.}\tfrac{1}{2}(CD+BD)^2$$

Fig. 44. d. i. $\sin.\frac{1}{2}(B+C).\tang.\frac{1}{2}(AC-AB) = \sin.\frac{1}{2}(B-C).\tang.\frac{1}{2}BC.$

Ferner, man dividire das Produkt der 2ten und 3ten Gleichung durch die erste, und schreibe dann statt des Quotus aus dem Produkte des Sinus und Cosinus der Winkel B, C durch die Tangente derselben Winkel (nach der angeführten Formel n. 88,

$$\text{wo nämlich } \tang.\frac{1}{2}(B \pm C) = \frac{\sin.\frac{1}{2}(B \pm C)}{\cos.\frac{1}{2}(B \pm C)}$$

das Quadrat des Cosinus, nämlich $\cos.\frac{1}{2}(B \pm C)^2$; so erhält man

$$\cos.\tfrac{1}{2}(B+C)^2.\tang.\tfrac{1}{2}(AC+AB)^2 = \cos.\tfrac{1}{2}(B-C)^2 .\tang.\tfrac{1}{2}(CD+BD)^2$$

$$\text{d. i. } \cos.\tfrac{1}{2}(B+C).\tang.\tfrac{1}{2}(AC+AB) = \cos.\tfrac{1}{2}(B-C).\tang.\tfrac{1}{2}BC.$$

Daß diese Gleichungen auch für Fig. 45 gelten, ist so zu beweisen: Man muß nämlich für diese Fig. statt $\tang.\frac{1}{2}(CD+BD)$ suchen $\tang.\frac{1}{2}(CD-AD)$. Obige Gleichungen aber bleiben ganz dieselben, wenn man unter B nun den äußeren Winkel ABD versteht. Verwechselt man dem zu Folge die Glieder unserer obigen 3ten Gleichung, und multiplizirt auf die vorgeschriebene Weise: so erhält man

1) $\sin.\frac{1}{2}(B+C).\tang.\frac{1}{2}(CD-BD) = \sin.\frac{1}{2}(B-C) : \tang.\frac{1}{2}(AC+AB)$

und nach der zweyten Verfahrungsart hat man

2) $\cos.\frac{1}{2}(B+C).\tang.\frac{1}{2}(CD-BD) = \cos.\frac{1}{2}(B-C).\tang.\frac{1}{2}(AC-AB).$

Sehr

Setzt man in diesen Gleichungen für m den inneren Winkel: so muß man $180^\circ - C$ statt B schreiben (§. 48. Zus. 1).

Es ist aber $\sin.\frac{1}{2}(180^\circ - B + C) = \cos.\frac{1}{2}(B - C)$; $\sin.\frac{1}{2}(180^\circ - B - C) = \cos.\frac{1}{2}(B + C)$; eben so ist $\cos.\frac{1}{2}(180^\circ - B + C) = \sin.\frac{1}{2}(B - C)$; $\cos.\frac{1}{2}(180^\circ - B - C) = \sin.\frac{1}{2}(B + C)$.

Es werden folglich die obigen Gleichungen für Fig 45 ganz dieselben wie die deduzirten für Fig. 44.

Setzt man daher $AC = b$, $AB = c$, $BC = a$, und die entgegenstehenden Winkel resp. B, C, A: so gelten folgende Formeln allgemein

XX. $$\text{tang.}\frac{1}{2}(b-c) = \frac{\sin.\frac{1}{2}(B-C)\,.\,\text{tang.}\frac{1}{2}a}{\sin.\frac{1}{2}(B+C)}$$

XXI. $$\text{tang.}\frac{1}{2}(b+c) = \frac{\cos.\frac{1}{2}(B-C)\,.\,\text{tang.}\frac{1}{2}a}{\cos.\frac{1}{2}(B+C)}.$$

Aus beyden Gleichungen hat man

XXII. $$\text{tang.}\frac{1}{2}a = \frac{\sin.\frac{1}{2}(B+C)}{\sin.\frac{1}{2}(B-C)}\,.\,\text{tang.}\frac{1}{2}(b-c).$$

XXIII. $$\text{tang.}\frac{1}{2}a = \frac{\cos.\frac{1}{2}(B+C)}{\cos.\frac{1}{2}(B-C)}\,.\,\text{tang.}\frac{1}{2}(b+c).$$

Diese Gleichungen dienen, die dritte Seite zu finden, nachdem man aus zwey gegebenen Seiten und einem entgegenstehenden Winkel auch den andern der zweyten Seite entgegenstehenden Winkel aufgefunden hat.

§. 125.

Auf eine ähnliche Art kann man Formeln zur Lösung der Aufgabe: aus zwey mit dem eingeschlossenen Winkel gegebenen Seiten die zwey andern Winkel zu finden, entwickeln.

Es entstehen nämlich aus obigen Proportionen drey Gleichungen:

1) aus XV. $\text{tang.}\frac{1}{2}(B+C).\text{tang.}\frac{1}{2}AC-AB) = \text{tang.}\frac{1}{2}(B-C).\text{tang.}\frac{1}{2}(AC+AB)$;

2) aus XVII. $\sin.\frac{1}{2}(AC-AB).\cos.\frac{1}{2}(AC-AB) = \text{tang.}\frac{1}{2}(CAD+BAD).\text{tang.}\frac{1}{2}(CAD-BAD).\sin.\frac{1}{2}(AC+AB).\cos.\frac{1}{2}(AC+AB)$;

3) aus XIX. $\text{tang.}\frac{1}{2}(CAD-BAD) = \text{tang.}\frac{1}{2}(B+C).\text{tang.}\frac{1}{2}(B-C).\text{tang.}\frac{1}{2}(CAD+BAD)$.

Werden unter derselben Verfahrungsart, wie §. 124. **erstens** die vordern Glieder mit einander und die hintern eben so mit einander multiplizirt: so erhält man

$\sin.\frac{1}{2}(AC-AB = \text{tang.}\frac{1}{2}(B-C)^2.\sin.\frac{1}{2}(AC+AB^2).\text{tang.}\frac{1}{2}(CAD+BAD)^2$

d. i. $\sin.\frac{1}{2}(AC-AB) = \text{tang.}\frac{1}{2}(B-C).\sin.\frac{1}{2}(AC+AB).\text{tang.}\frac{1}{2}A$,

Dividirt man zweytens das Produkt der zweyten Gleichung in die dritte durch die erste: so hat man

$\cos.\frac{1}{2}(AC-AB)^2 = \text{tang.}\frac{1}{2}(B+C)^2.\cos.\frac{1}{2}(AC+AB)^2.\text{tang.}\frac{1}{2}(CAD+BAD)^2$

d. i.

d. i. $\frac{1}{2}$ col. (AC—AB) = tang. $\frac{1}{2}$(B+C). col. $\frac{1}{2}$(AC + AB). tang. $\frac{1}{2}$A.

Es ist daher, wenn man sich der vorigen Bezeichnung §. 124 bedient:

XXIV. $$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(b-c) \cdot \text{cot. } \tfrac{1}{2}A}{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(b+c)}$$ n. 18.

XXV. $$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(B+C) = \frac{\text{col. } \tfrac{1}{2}(b-c) \cdot \text{cot. } \tfrac{1}{2}A}{\text{col. } \tfrac{1}{2}(b+c)}.$$

Hieraus hat man wieder, wie §. 124 zuletzt, für den dritten Winkel folgende zwey sehr bequeme Gleichungen:

XXVI. $$\text{tang. } \tfrac{1}{2}A = \frac{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{sin. } \tfrac{1}{2}(b+c)} \cdot \text{cot. } \tfrac{1}{2}(B-C)$$ n. 18.

XXVII. $$\text{tang. } \tfrac{1}{2}A = \frac{\text{col. } \tfrac{1}{2}(b-c)}{\text{col. } \tfrac{1}{2}(b+c)} \cdot \text{cot. } \tfrac{1}{2}(B+C).$$

Hieraus hat man ferner

XXVIII. $$\text{cot. } \tfrac{1}{2}(B+C) = \text{tang. } \tfrac{1}{2}A \cdot \frac{\text{col. } \tfrac{1}{2}(b+c)}{\text{col. } \tfrac{1}{2}(b-c)}.$$

Zusatz. Es ist nach geschehener Verwechselung der Glieder der dritten Gleichung, und wenn man bemerkt, daß tang. $\frac{1}{2}$ (180° — B + C) = cot. $\frac{1}{2}$ (B — C), und tang. $\frac{1}{2}$ (180° — B — C) = cot. $\frac{1}{2}$ (B + C) ist, leicht zu beweisen, daß eben dieselben Formeln auch für Fig. 45, wo das Loth außerhalb des Dreyeckes fällt, gelten.

Schol. Aus der hier zuletzt angeführten Gleichung hat Kästner *) mit seinem bekannten Scharfsinne den Beweis für unsern Satz §. 95. Zus. 1. u. s. w. abgeleitet.

§. 126.

Noch folgen einige andere bequeme Formeln zur Rechnung.

1) Nach §. 121. XII. ist $\text{cos. B} = \frac{\text{cos. b} - \text{cos. a cos. c}}{\text{sin. a . sin. c}}$

und nach §. 40 . n. 39 ist $2 \text{ sin. } B^2 = 1 - \text{cos. B}$, folglich ist

$$2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2} B^2 = \frac{\text{sin. a . sin. c} + \text{cos. a . cos. c} - \text{cos. b}}{\text{sin. a . sin. c}}$$

$$= \frac{\text{cos. (a} - \text{c)} - \text{cos. b}}{\text{sin. a . sin. c}} \text{ (§. 47. n. 61.)}$$

$$= \frac{2 \text{ sin. } \frac{1}{2}(\text{a} + \text{b} - \text{c}) . \text{sin. } \frac{1}{2}(\text{b} + \text{c} - \text{a})}{\text{sin. a . sin. c}}$$

nach §. 53. n. 87, in der man für ψ substituirt a—c. Daher

XXIX. $\text{sin. } \frac{1}{2} B^2 = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(\text{a} + \text{b} - \text{c}) \text{ sin. } \frac{1}{2}(\text{b} + \text{c} - \text{a})}{\text{sin. a . sin. c}}$

2) Eben so ist, weil nach §. 41, n. 45. $2 . \text{cos. } \frac{1}{2} B^2 = 1 + \text{cos. B}$:

2 cos.

*) Man sehe dessen astronomische Abhandlung. I. B. S. 76. u. ff.

$$2\,\text{col.}\,\tfrac{1}{2}B^2 = \frac{\text{sin.a . sin. c} - \text{col. a . col. c} + \text{col. b}}{\text{sin. a . sin. c}}$$

$$= \frac{\text{col. b} - \text{col. (a + c)}}{\text{sin. a . sin. c}} \text{. n. 62.}$$

$$= \frac{2\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sin. a . sin. c}}$$

wenn man nämlich in n. 87 statt φ setzt $a+c$. Also

$$\text{XXX. col.}\,\tfrac{1}{2}B^2 = \frac{\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b+c)\,.\,\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sin. a . sin. c}}$$

Zusatz 1. Beyde Formeln, mittels welcher man aus den drey bekannten Seiten des Kugeldreyeckes einen Winkel finden kann, haben noch den Vorzug, daß sie die Rechnung sehr erleichtern. Denn da hier, wie es sonst in vielen Fällen der Fall umgekehrt ist, keine bloß addirten oder subtrahirten Größen vorkommen: so können die Logarithmen leicht angewendet werden.

So ist aus XXIX

$$\text{log. sin.}\,\tfrac{1}{2}B =$$
$$\frac{\text{log. sin.}\,\tfrac{1}{2}(a+b-c) + \text{log. sin.}\,\tfrac{1}{2}(b+c-a) - (\text{log. sin. a} + \text{log. sin. c})}{2}$$

Zusatz 2. Wollte man diese Gleichungen in eine Proportion auflösen: so müßte man, wenn der Halbmesser r heißt, setzen:

$\sin. a . \sin. c : \sin. \frac{1}{2}(a+b-c) . \sin. \frac{1}{2}(b+c-a) =$
$r^2 : \sin. \frac{1}{2} B^2$;

und $\sin. a . \sin. e : \sin. \frac{1}{2}(a+b+c) . \sin. \frac{1}{2}(a+c-b) =$
$r^2 : \cos. \frac{1}{2} B^2$;

Formeln, die bey Schulz und Bürja ohne Beweis vorkommen.

§. 127.

Auf ähnliche Art, wie im vorigen §. lassen sich bequeme Formeln auffinden, nach welchen aus drey gegebenen Winkeln eine Seite gesucht wird.

1) Es ist nach §. 122. XIV. $\cos b = \frac{\cos. B + \cos. A . \cos. C}{\sin. C . \sin. A}$

und $2 . \sin. \frac{1}{2} b^2 = 1 - \cos. b$. n. 39.

Folglich $2 . \sin. \frac{1}{2} b^2 = \frac{\sin. C . \sin. A - \cos. C . \cos. A - \cos. B}{\sin. C . \sin. A}$

$= \frac{-\cos. (A+C) - \cos. B}{\sin. A . \sin. C}$ n. 62.

$= \frac{-2 . \cos. \frac{1}{2}(A+B+C) . \cos. \frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin. A . \sin. C}$

n. 86.

Also

XXXI. $\sin. \frac{1}{2} b^2$

$= \frac{-\cos. \frac{1}{2}(A+B+C) . \cos. \frac{1}{2}(A+C-B)}{\sin. A . \sin. C}$.

2)

2) Eben so findet man, wie vorhin;

XXXII. $\text{col.} \frac{1}{2} b^2 = -\frac{\text{col.} \frac{1}{2}(A+B-C) \cdot \text{col.} \frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sin.} A \cdot \text{sin.} C}$.

Zusatz 1. Ungeachtet $\text{sin.} \frac{1}{2} b^2$ hier negativ ausgedrückt ist: so ist er doch positiv; indem der Cosinus der halben Summe der drey Winkel seiner Natur nach negativ ist. Denn, weil die halbe Summe der drey Winkel eines sphärischen Dreyeckes größer als ein rechter Winkel, aber kleiner als $3 \cdot 90°$ ist (§. 94. Zus. 1): so muß ihr Cosinus nothwendig in den 2ten oder 3ten Quadranten fallen, folglich negativ seyn (§. 11).

Es ist übrigens für sich klar, daß man bey der Rechnung nach diesen Formeln, des Ziehens des Perpendikels überhoben, und daß sowohl $\frac{1}{2} B$, als $\frac{1}{2} b$ allemal spitz ist.

Zusatz 2. Aus jenen Formeln können mehrere abgeleitet werden, z. B. da $\text{tang.} \alpha = \frac{\text{sin.} \alpha}{\text{col.} \alpha}$: so ist aus XXIX, XXX

XXXIII. $\text{tang.} \frac{1}{2} B^2 = \frac{\text{sin.} \frac{1}{2}(a+b-c) \cdot \text{sin.} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sin.} \frac{1}{2}(a+b+c) \cdot \text{sin.} \frac{1}{2}(a+c-b)}$

XXXIV. $\text{tang.} \frac{1}{2} b^2 = -\frac{\text{col.} \frac{1}{2}(A+B+C) \cdot \text{col.} \frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{col.} \frac{1}{2}(A+B-C) \cdot \text{col.} \frac{1}{2}(B+C-A)}$

(aus diesem §.)

§. 128.

Nach Entwickelung dieser Formeln können wir nunmehr zur Auflösung der Aufgaben: Aus drey gegebenen oder bekannten Stücken eines beliebigen schiefwinkligen Kugeldreyeckes eines der übrigen zu finden, fortgehen.

Ich werde hiebey die Hauptfälle, von denen ich oben am Ende des §. 119 sprach, mit H, die Summe der drey Seiten, wie der Winkel wieder mit S, die übrigen Stücke aber wie gewöhnlich bezeichnen.

Es können zwölf Fälle vorkommen:

Gegeben		gesucht	Fall.
A. 3 Seiten		1 Winkel	1.
B. 3 Winkel		1 Seite	2.
C. 2 Seiten 1 Winkel			
a) der eingeschlossene Winkel	3te Seite		3.
	1 Winkel		4.
b) der opponirte Winkel	opponirte Winkel		5.
	eingeschlossene W.		6.
	3te Seite		7.
D. 2 Winkel, 1 Seite			
a) die eingeschlossene Seite	1 Winkel		8.
	1 Seite		9.
β) die opponirte Seite	opponirte Seite		10.
	anliegende Seite		11.
	3ter Winkel		12.

Fall 1. H.

Gegeben a, b, c, d. i. die drey Seiten.

Gesucht 1 Winkel, z. B. A, welchem a entgegensteht.

Auflösung durch folgende Gleichungen:

1) $\sin.\frac{1}{2}A = \sqrt{\left[\frac{\sin.(\frac{1}{2}S-b).\sin.(\frac{1}{2}S-c)}{\sin.b\ .\ \sin.c}\right]}$. XXIX.

oder $\log.\sin.\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}[20 + \log.\sin.(\frac{1}{2}S-b) + \log.\sin.(\frac{1}{2}S-c) - \log.\sin.b - \log.\sin.c]$

2) $\cos.\frac{1}{2}A = \sqrt{\left[\frac{\sin.\frac{1}{2}S\ .\sin.(\frac{1}{2}S-a)}{\sin.b\ .\ \sin.c}\right]}$. XXX.

3) $\tang.\frac{1}{2}A = \sqrt{\left[\frac{\sin.(\frac{1}{2}S-b).\sin.(\frac{1}{2}S-c)}{\sin.\frac{1}{2}S\ .\sin.(\frac{1}{2}S-a)}\right]}$. §. 127. Zus. 2.

Wollte man bloß von den im §. 120 gegebenen Grundsätzen hier Gebrauch machen: so hätte man, indem man sich ein Perpendikel gezogen denkt, die halbe Differenz $= d$ der dadurch auf der Grundseite $= c$ oder ihrer Verlängerung entstandenen Segmente nach §. 118 zu suchen. Demnach wäre, wenn a und b die zwey andere Seiten bedeuten, und $b < a$

4) $\tang.d = \tang.\frac{1}{2}(a+b).\tang.\frac{1}{2}(a-b).\cot.\frac{1}{2}c$;

wenn man nämlich für $\tang.\frac{1}{2}c$ setzt $\frac{1}{\cot.\frac{1}{2}c}$, um die Division zu vermeiden.

Der größere Abschnitt ist dann $= \frac{1}{2}c + d$,

der kleinere $= \frac{1}{2}c - d$.

Um dann A zu finden, gilt die Gleichung

$\cos. A = \tang.$ des anliegenden Abschnitts . cot. b (§. 111. II) mit der nur so gemachten Bemerkung).

Hiebey wird der größere Abschnitt zur größten Seite, der kleinere zur kleinsten genommen. Ferner, ist das kleinere Segment negativ und $< 90°$: so wird die Tangente dieses Segments negativ gesetzt.

Fall 2.

Gegeben A, B, C d. i. die drey Winkel.

Gesucht eine Seite z. B. a, welche dem W. A entgegensteht.

Auflösung in folgenden Gleichungen:

1) $\sin. \frac{1}{2}a = \sqrt{\left[-\frac{\cos. \frac{1}{2}S . \cos. (\frac{1}{2}S - A)}{\sin. B . \sin. C}\right]}$. XXXI.

2) $\cos. \frac{1}{2}a = \sqrt{\left[\frac{\cos. (\frac{1}{2}S - B) . \cos. (S - C)}{\sin. B . \sin. C}\right]}$. XXXII.

3) $\tang. \frac{1}{2}a = \sqrt{\left[-\frac{\cos. \frac{1}{2}S . \cos. (\frac{1}{2}S - A}{\cos. (\frac{1}{2}S - B) . \cos. \frac{1}{2}(S - C)}\right]}$. XXXIV.

Auch kann man sich der Gleichung. XIV bedienen:

4) $\cos. a = \frac{\cos. A + \cos. B . \cos. C}{\sin. B . \sin. C}$.

5) Mittels des Ergänzungsdreyeckes kann dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt werden, indem man setzt: Fig. 30.

$$180° - A = \alpha;$$
$$180° - B = \beta;$$
$$180° - C = \gamma;$$

mittels dieser nun bekannten drey Seiten α, β, γ sucht man durch die eine der Gleichungen für Fall 1 die gegenüberstehenden Winkel D, E, F, worauf man dann hat

$$a = 180° - D;$$
$$b = 180° - E;$$
$$c = 180° - F.$$

Zusatz. Auf dieselbe Art läßt sich auch der erste Fall behandeln, indem man ihn auf gegenwärtigen zweyten reduzirt.

Denn es ist

$$180° - a = D;$$
$$180° - b = E;$$
$$180° - c = F.$$

Aus diesen Winkeln D, E, F, die man nun kennt, findet man die gegenüberstehenden Seiten α, β, γ; woraus denn endlich

$$A = 180° - \alpha;$$
$$B = 180° - \beta;$$
$$C = 180° - \gamma.$$

6) Es heiße Vertikalwinkel = C, Winkel schlechtweg = A, B: so ist nach §. 123 XIX wenn A > B

tang. d = tang. $\frac{1}{2}$ (A + B) . tang. $\frac{1}{2}$ (A — B) . tang. $\frac{1}{2}$ C.

Größeres Segment = $\frac{1}{2}$ C + d,

kleineres = $\frac{1}{2}$ C — d.

Daraus ist

cos. a = cot. des anliegenden Segments

× cot. B (§. 111 IV.)

Anmerk. Man nimmt hier zum größten Winkel das kleine, zum kleinsten das große Segment. Ist das kleine Segment negativ und < 90°: so setzt man — cot. dieses Segments.

Fall 3. H.

Gegeben 2 Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel.

Gesucht 1 der übrigen Winkel.

Es bedeute wieder generel a und b die beyden gegebenen Seiten, B den der Seite b entgegenstehenden Winkel, C den eingeschlossenen. Man suche B.

Auflösung nach folgenden Gleichungen:

1) Man suche d nach §. 111. II), woraus

tang. d. = tang. b. cos. C. Und nun

$$\text{tang. } B = \frac{\text{tang. } C . \sin. d}{\sin. (a - d)}$$ §. 120. III;

wo, wenn d > a, der Sinus (a — d) negativ wird.

2) $\text{tang. } B = \frac{\text{sin. C}}{\text{sin. a . cot. b} - \text{cos. a . cos. C}}$. IX.

oder $\text{cot. } B = \frac{\text{sin. a . cot. b}}{\text{sin. C}} - \text{cos. a . cos. C.}$

Wenn der zweyte unbekannte Winkel A, und a > b ist: so hat man beyde Winkel auf einmal durch

3) $\text{tang. } \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(a-b) - \text{cot. } \frac{1}{2}C}{\text{cos. } \frac{1}{2}(a+b)}$. XXV.

und $\text{tang. } \frac{1}{2}(A-B) = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(a-b) . \text{cot. } \frac{1}{2}C}{\text{sin. } \frac{1}{2}(a+b)}$. XXIV.

Hieraus ist nämlich

$\frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}(A-B) = A$

und $\frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{2}(A-B) = B.$

Will man keine dieser oder anderer Gleichungen geradezu anwenden: so müßte dieser Fall nach den ersten Prinzipien einfach so behandelt werden:

4) Wenn in Fig. 44. BC, AB und B gegeben sind, und man soll C finden: so fällt man das Loth aus des dritten Winkels A Spitze, und sucht BD aus

$1 : \text{cos. } B = \text{tang. AB} : \text{tang. BD.}$

BD nun von BC abgezogen, oder in Fig. 45 zu BC addirt, giebt das größere Segment CD. Dann hat man C aus

sin.

sin. BD : sin. CD = cot. B : cot. C (§. 120. III.)
oder sin. CD : sin. BD = tang. B. : tang. C.

Fall 4. H.

Gegeben 2 Seiten a, c mit dem eingeschlossenen Winkel B.

Gesucht die dritte Seite b.

a > c.

Auflösung durch folgende Gleichungen:

1) tang. d = tang. a . cos. B, wie vorhin;

daher $\cos. b = \frac{\cos. a . \cos. (c - d)}{\cos. d}$ §. 120. II.)

Diese Gleichung, wie die für Fall 3 unter 1) ist keine andere, als wie sie durch die ersten Grundsätze gegeben wird. Weitläuftiger nämlich ausgedrückt, mit Hinweisung auf Figg. 44, 45 müßte es heißen: Man ziehe ein Perpendikel aus einem der unbekannten Winkel, und suche dann den Abschnitt BD durch

r : cos. B = tang. c : tang. BD ;

dieses entweder zur gegebenen Seite a addirt, oder davon subtrahirt, giebt das große Segment CD; und nun ist

cos. BD : cos. CD = cos. c : b.

In der Gleichung ist nur angenommen, daß das Perpendikel aus C auf c gefällt sey.

2) $\cos. b = \cos. a . \cos. c + \cos. B . \sin. a . \sin. c.$

§. 121. XI.

3)

3) Nach §. 126 1) ist, wenn $a > c$

$$2 \sin.\tfrac{1}{2} B^2 \sin.a.\sin.c = \cos.(a-c) - \cos.b.$$

Man verfahre nun hier, wie §. 64. Zus. 2.; indem man nämlich für $\cos.\alpha$ $1-2\sin.\tfrac{1}{2}\alpha^2$ substituirt. Es ist demnach

$$2\sin.\tfrac{1}{2}B^2 . \sin.a.\sin.c = 2\sin.\tfrac{1}{2}b - 2\sin.\tfrac{1}{2}(a-c)^2 .$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\left(\sin.\tfrac{1}{2}(a-c)^2 + \sin.\tfrac{1}{2}B^2 . \sin.a . \sin.c\right)}$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}b = \sin.\tfrac{1}{2}(a-c)\sqrt{\left[1+\frac{\sin.\tfrac{1}{2}B^2.\sin.a.\sin.c}{\sin.\tfrac{1}{2}(a-c)^2}\right]}$$

Die Größe unter dem Wurzelzeichen $=$ $\sqrt{(1+\text{tang.}\alpha^2)}$ gesetzt, ist

$$1.\ \text{tang.}\alpha = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}B}{\sin.\tfrac{1}{2}(a-c)}\sqrt{\sin.a.\sin.c.}$$

$$2.\ \sin.\tfrac{1}{2}b = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(a-c)}{\cos.\alpha}.$$

Diese Formel giebt ein sicheres Resultat, wenn die gesuchte Seite klein ist.

Fall 5.

Gegeben 2 Winkel und die eingeschlossene Seite, d. i. B, C und a.

Gesucht eine von den beyden übrigen Seiten; z. B. b, welche dem Winkel B gegenübersteht. Für diese

Auf-

Auflösung gelten die Gleichungen:

1) $\text{tang. } b = \frac{\text{sin. a}}{\text{sin. C . cot. B} + \text{cos. a . cos. C}}$. X.

oder $\text{cot. } b = \frac{\text{sin. C . cot. B}}{\text{sin. a}} + \text{cot. a . cos. C.}$

2) Die beyden unbekannten Seiten b und c zugleich, wenn $b > c$ und $B > C$, findet man aus

a) $\text{tang. } \frac{1}{2}(b+c) = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(B-C) \text{ . tang. } \frac{1}{2} a}{\text{cos. } \frac{1}{2}(B+C)}$. XXI.

b) $\text{tang. } \frac{1}{2}(b-c) = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(B-C) \text{ . tang. } \frac{1}{2} a}{\text{sin. } \frac{1}{2}(B+C)}$. XX.

Hieraus hat man dann

$\frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(b-c) = b$

und $\frac{1}{2}(b+c) - \frac{1}{2}(b-c) = c.$

3) Man kann auch gegenwärtige Aufgabe dadurch lösen, daß man mittels des Ergänzungsdreyeckes diesen Fall auf Fall 3. zurückführt, so wie man umgekehrt diesen auf Fall 5 zurückführen kann.

Fig. 46. Das vorgegebene Dreyeck sey ABC, worinn A, B, c gegeben seyen für Fall 5; für Fall 3 aber seyen gegeben a, b, C.

Auf-

Auflösung.

I. Des 5ten Falles durch den dritten

$180° - A = \alpha$

$180° - B = \beta$

$180° - c = \mathfrak{C}$

Aus den Seiten α, β und dem eingeschlossenen Winkel $\mathfrak{C}$ wird der W. $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$ nach Fall 3 berechnet. Alsdann ist

$a = 180° - \mathfrak{A}$

$b = 180° - \mathfrak{B}$

4) cot. d = tang. B . cos. a (§. 111. IV).

Daraus ist

$$\text{tang. b} = \frac{\text{tang. a. cos. d)}}{\text{cos. (C—d)}} \text{ (§. 120. VI).}$$

II. des 3ten durch den 5ten.

$180° - a = \mathfrak{A}$

$180° - b = \mathfrak{B}$

$100° - C = \gamma$.

Aus den Winkeln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und der eingeschlossenen Seite γ findet man nach Fall 5 die Seite α und β. Alsdann ist

$A = 180° - \alpha$

$B = 180° - \beta$.

Fall 6.

Gegeben 2 Winkel A, B und die eingeschlossene Seite c.

Gesucht der dritte Winkel C.

Auflösung nach den Gleichungen:

1) cos. C = cos. c . sin. A . sin. B — cos. A . cos. B.

2) cot. d. = cos. c . tang. A (§. 111. IV.)

woraus

$$\text{cos. C} = \frac{\text{cos. A . sin. (B—d)}}{\text{sin. d}} \text{ (§. 120. VII.)}$$

wo, wenn $d > B$, sin. (B—d) verneint ist.

3) Durch Zurückführung dieses Falls 6 auf Fall 4, und umgekehrt, mittels des Ergänzungsdreyeckes. Fig. 46.

Nämlich für Fall 6 ist

$$\alpha = 180^\circ - A$$
$$\beta = 180^\circ - B$$
$$\mathfrak{C} = 180^\circ - c$$

Hieraus erhält man nach Fall 4 γ; und dieses giebt

$$C = 180^\circ - \gamma.$$

Für Fall 4 ist, wenn c das Gesuchte,

$$\mathfrak{A} = 180^\circ - a$$
$$\mathfrak{B} = 180^\circ - b$$
$$\gamma = 180^\circ - C$$

Hieraus erhält man nach Fall 6 $\mathfrak{C}$; und dieß giebt das Gesuchte

$$c = 180^\circ - \mathfrak{C}.$$

4) Wie in Fall 4 gilt auch hier, wenn C sehr klein ist, folgende Auflösung mittels zweyer Gleichungen:

Nach §. 127. 1) ist durch gehörige Aenderung der Buchstaben:

$$2 \sin.\tfrac{1}{2}c^2 . \sin.A . \sin.B = -\cos.(A+B) - \cos.C.$$

$$2\sin.\tfrac{1}{2}c^2 \sin.A . \sin.B = 1 - 2\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)^2 - 1 + 2\sin.\tfrac{1}{2}C^2;$$ nn. 113; 114.

$$\sin.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{(\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)^2 + \sin.A . \sin.B . \sin.\tfrac{1}{2}c^2}.$$

Woraus denn

$$1. \tang.\alpha = \frac{\sin.\frac{1}{2}c}{\cos.\frac{1}{2}(A+B)} \sqrt{(\sin.A . \sin.B)}$$

$$2. \sin.\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}{\cos.\alpha}.$$

Fall 7. §.

Gegeben 2 Seiten a, b und 1 gegenüberstehender Winkel A.

Ge-

Gesucht B, d. i. der der andern gegebenen Seite opponirte Winkel.

Auflösung

$$\sin. B = \frac{\sin. b \, , \sin. A}{\sin. a}$$ §. 120. I.)

Ob B > oder < 90° sey, bleibt an sich zweydeutig, wenn nicht diese drey Regeln die Zweydeutigkeit heben:

1) Wenn $(a + b) >$ oder $<$ oder $= 180°$:
ist auch $(A + B) >$ oder $<$ oder $= 180°$.

2) $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{A+B}{2}$ müssen allzeit gleichartig seyn.

3) Im Anhange des genannten Werkes von Cagnoli S. 469 wird auch folgende von H. dé Lambre dem Verf. mitgetheilte Regel zur Hebung jener Zweydeutigkeit angeführt:

Ein Winkel ist gleichartig mit der ihm gegenüberstehenden Seite, wenn eine der an ihm liegenden Seiten einen Werth hat, welcher entweder zwischen die Werthe jener entgegenstehenden Seite und des Supplements eben dieser Seite fällt, oder welcher einem der letztgenannten Werthe gleich ist. *)

Die Richtigkeit dieser Regel erhellt schon aus der Formel

*) In dem dort angeführten Beyspiele ist unrichtig AC statt AB gesetzt.

$$\text{cos. B} = \frac{\text{cos. b} - \text{cos. c . cos. a}}{\text{sin. c . sin. a}}$$ §. 121. XII.

Denn hieraus erhellt, daß B mit b gleichartig ist, sobald cos. b > cos. c . cos. a. Dieses aber ist immer der Fall, sobald a = b, oder a = 180° — b, oder der Werth von a zwischen b und 180° — b liegt: indem in diesen dreyen Fällen cos. b entweder = cos. a oder > cos. a, und folglich cos. b > cos. c . cos. a ist.

Diese Regel ist darum so nützlich, weil man, wie offenbar ist, sogleich aus der Aufgabe entscheiden kann, wie man B finden müsse.

Derselbe Nutzen gilt für Fall 8 und Fall 9.

Fall 8. H.

Gegeben 2 Seiten a, b und 1 gegenüberst. Winkel.

Gesucht der von den gegebenen Seiten eingeschlossene Winkel C.

Auflösung durch folgende Gleichungen:

1) Das aus dem Scheitel dieses gesuchten C gefällte Loth macht 2 Segmente d, e. Nun ist

a) cot. d = tang. A . cos. b (§. 111. IV)

$$\text{b) cos. e} = \frac{\text{cos. d . tang. b}}{\text{tang. a}}$$ (§. 120. VI).

Aber $d \pm e = C$, folgl. entsteht hier eine Zweydeutigkeit.

2) Es ist aus Fall 7

$$\text{sin. B} = \frac{\text{sin. b . sin. A}}{\text{sin, a}}$$; d. i. B als bekannt angesehen;

hat man

cot.

$$\text{cot.}\tfrac{1}{2}C = \frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(a-b).\text{cot.}\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(a+b)}$$ (gemäß der Deduktion der Formel XXIII. §. 124).

So oft also nach Fall 7 B zweydeutig bleibt, muß es auch C im Fall 8 bleiben. Wie man zuweilen diese Zweydeutigkeit heben könne, kömmt vor bey

Fall 9. H.

Gegeben 2 Seiten a, b und ein gegenüberstehender Winkel A.

Gesucht c, oder die dritte Seite.

Auflösung durch die Gleichungen:

1) wie bey Fall 8.

a) $\text{tang.}\, d = \text{cos.}\, A . \text{tang.}\, b$ (§. 111. II)

b) $\text{cos.}\, e. = \frac{\text{cos.}\, d . \text{cos.}\, a}{\text{cos.}\, b}$ (§. 120. II.)

Hieraus ist

$d \pm e = c$.

Schon die Ansicht der Figg. 44, 45 giebt es, daß man, wenn die den Seiten a, b gegenüberstehenden Winkel gleichartig sind, die Summe, im entgegengesetzten Falle aber die Differenz d—e nehmen müsse, um c zu haben. Es bleibt folglich an und für sich sowohl bey Falle 8, als Falle 9 C und c zweydeutig, so oft B ungewiß ist.

Folgende Regel kann zuweilen diese Ungewißheit heben:

Wenn die Summe $(d+e) > 180°$: so ist der Unterschied $(d-e) = \begin{bmatrix} C \text{ Fall 8.} \\ c \text{ Fall 9.} \end{bmatrix}$ und wenn (d—e)

negativ oder $e > d$: so ist die Summe $(d + e) =$ {C Fall 8. / c Fall 9.}.

a) Aus $\sin. B = \frac{\sin. b \,.\, \sin. A}{\sin. a}$ ist B bekannt, und nun ist

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2} c = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2} (A + B) \,.\, \text{tang. } \frac{1}{2} (a + b)}{\text{cos. } \frac{1}{2} (A - B)}$$

(§. 124. XXIII.).

Fall 10.

Gegeben 2 Winkel A, B und eine gegenüberstehende Seite a.

Gesucht die dem andern gegebenen Winkel B gegenüberstehende Seite b.

Auflösung

1) $\sin. b = \frac{\sin. B \,.\, \sin a}{\sin. A}$.

b bleibt zweifelhaft, wenn nicht auch hier folgende Regel bestimmt, ob es $>$ oder $< 90°$ müsse genommen werden: Nämlich

ist $(A + B) >$ oder $<$ oder $= 180°$

so ist auch $(a + b) >$ oder $<$ oder $= 180°$.

Oder

$\frac{A + B}{2}$ und $\frac{a + b}{a}$ müssen allzeit gleichartig seyn.

Auch hier gilt auf eine ähnliche Art, wie in Fall 7, zur Hebung jener Unzweydeutigkeit die Regel:

b ist

b ist mit B allzeit gleichartig, so oft der Werth von A entweder zwischen die Werthe von B und 180° — B fällt, oder gleich ist einem dieser letztgenannten Werthe.

Die Richtigkeit dieser Regel, welche auch für Fall 11 und Fall 12 nützlich ist, erhellt auf ähnliche Art, wie oben, mittels der Formel

$$\text{cos. b} = \frac{\text{cos. B} + \text{cos. A} \,.\, \text{cos. C}}{\text{sin. C} \,.\, \text{sin. A}}$$ §. 121. XIV.

2) Es kann dieser Fall durch Fall 7 mittels des Ergänzungsdreyeckes berechnet werden.

Fall 11.

Gegeben 2 Winkel A, B und eine gegenüberstehende Seite a.

Gesucht die den gegebenen Winkel A, B anliegende Seite c.

Auflösung.

1) Da b aus $\frac{\text{sin. B} \,.\, \text{sin. a}}{\text{sin. A}} = \text{sin. b}$, wie vorher bekannt ist:

so findet man nun c aus

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} \text{c} = \frac{\text{cos.} \tfrac{1}{2} (\text{A} + \text{B}) \,.\, \text{tang.} \tfrac{1}{2} (\text{a} + \text{b})}{(\text{cos.} \tfrac{1}{2} \text{A} - \text{B})}$$

2) $\text{tang. d} = \text{tang. a} \,.\, \text{cos. B}$

$$\text{sin. e} = \frac{\text{sin. d} \,.\, \text{cot. A}}{\text{cot. B}}$$ (§. 120. III).

d und e bedeuten auch hier wieder Segmente der gesuchten Seite, welche entstehen, wenn auf sie aus dem gegenüberstehenden Winkel ein Perpendikel gezogen gedacht wird; c ist dann $= d \pm e$. Wenn A und B ungleichartig, d. i. A spitz, B stumpf ist: so muß eigentlich sin. e und cot. B negativ, und e von d abgezogen werden; addirt aber, wenn auch B spitz ist.

3) Auch dieser Fall 11 ist durch Fall 8 mittels des Ergänzungsdreyeckes auflösbar.

Fall 12.

Gegeben 2 Winkel A, B und 1 gegenüberstehende Seite a.

Gesucht der dritte Winkel C.

Auflösung.

1) b aus $\sin. b = \frac{\sin. B . \sin. a}{\sin. A}$ als bekannt vorausgesetzt,

ist

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} C = \frac{\text{cos.} \tfrac{1}{2} (a - b) . \text{cot.} \tfrac{1}{2} (A + B)}{\text{cos.} \tfrac{1}{2} (a + b)}$$ (wie bey Falle 8. 2).

C ist zweydeutig, wenn b nach Falle 10 zweydeutig bleibt.

2) Mittels der Segmente des Winkels C; es ist nämlich

a) $\text{cot. } d = \text{cos. } a . \text{tang. } B$ (§. 111. IV.)

b) $\text{cos. } e = \frac{\text{sin. } d . \text{cos. } A}{\text{cos. } B}$ (§. 120. VII.)

c) $d \pm e = C$.

Auch

Auch hier wird wieder die Summe genommen, wenn A und B gleichartig; sonst aber der Unterschied. Da ferner e durch den Sinus gefunden wird, und also 2 Werthe hat: so ist allzeit der größte Werth von e zu verwerfen, wenn derselbe die Summe $(d+e) > 180°$, oder $d-e$ negativ giebt.

3) Mittels des Ergänzungsdreyeckes wird auch Fall 12 durch Fall 9 aufgelöst.

Anmerkung.

Umgekehrt sind Fall 7, 8, 9 respektive durch Fall 10, 11, 12 mit Hülfe des Ergänzungsdreyeckes zu berechnen. Woraus folgt, daß man wirklich eigentlich nur 6 Hauptfälle hat, welche vorerst nach den entwickelten Formeln oder demonstrirten Proportionen berechnet werden müßten, um so durch Zuhülfenehmen des Supplementairdreyeckes die übrigen 6 zu berechnen. Wobey es offenbar ist, daß es gleichgültig sey, welchen von zweyen Fällen man als Hauptfall ansehen wolle.

Was zur Hebung der bey den meisten Fällen obwaltenden Ungewißheit bemerkt worden ist, hat seinen Grund in den §§. 101—104.

§. 129.

Für **gleichschenklige** sphärische Dreyecke verwandeln sich die entwickelten Formeln in noch einfachere.

Ich thue dieses mit möglichster Kürze für folgende Fälle dar:

Fall 1.

Gegeben die 2 Schenkel a und die Grundlinie b.

Gesucht 1 Winkel A an der Grundlinie.

Formel.

1) $\text{cos.}\,A = \text{tang.}\,\frac{1}{2}\,b \,.\, \text{cot.}\,a$ (§. 111. II.), (indem man sich das Perpendikel gezogen denkt, und für tang. a setzt cot. a, um die Division zu vermeiden).

2) $\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,A = +\sqrt{\frac{\text{sin.}\,(a-\frac{1}{2}\,b)}{\text{sin.}\,(a+\frac{1}{2}\,b)}}$ (§. 127. Zus. 1).

Fall 2.

Gegeben die vorigen Stücke.

Gesucht B, d. i. der Winkel an der Spitze.

Formel.

$$\text{sin.}\,\tfrac{1}{2}\,B = \frac{\text{sin.}\,\frac{1}{2}\,b}{\text{sin.}\,a}$$ (§. 111. V.)

$\frac{B}{2}$ und $\frac{b}{2}$ gleichartig.

Fall 3.

Gegeben beyde Schenkel a mit dem Winkel A an der Grundlinie.

Gesucht letztere selbst, d. i. b.

Formel.

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\,b = \text{tang.}\,a \,.\, \text{cos.}\,A.$$

Fall

Fall 4.

Gegeben die vorigen Stücke.
Gesucht der Winkel B an der Spitze.

Formel.

$$\cot. \tfrac{1}{2} B = \text{cos}. a . \text{tang}. A.$$

Fall 5.

Gegeben die Schenkel a mit dem Winkel an der Spitze, d.i. B.
Gesucht die Grundlinie b.

Formel.

$$\text{sin}. \frac{b}{2} \quad \text{sin}. a . \text{sin}. \frac{B}{2}.$$

Fall 6.

Gegeben die vorigen Stücke.
Gesucht der Winkel A an der Grundlinie.

Formel.

$$\cot. A = \text{cos}. a . \text{tang}. \tfrac{1}{2} B.$$

Fall 7.

Gegeben beyde Winkel A an der Grundlinie b mit dieser.
Gesucht die Schenkel a.

Formel.

$$\cot. a = \cot. \tfrac{1}{2} b . \text{cos}. A.$$

Fall 8.

Gegeben die vorigen Stücke.
Gesucht der Winkel B an der Spitze.

Formel.

$$\cot. a = \text{cos}. A . \cot. \tfrac{1}{2} b$$

$$\cot. \tfrac{1}{2} B = \text{cos}. a . \text{tang}. A.$$

Fall 9.

Gegeben die Grundlinie b und der Winkel B an der Spitze.

Gesucht die Schenkel a.

Formel.

$$\text{sin}. a = \frac{\text{sin}. \tfrac{1}{2} b}{\text{sin}. \tfrac{1}{2} B}.$$

a bleibt hier zweyfelhaft, wie auch A im folgenden

Falle 10.

Gegeben die vorigen Stücke.

Gesucht die Winkel an der Grundlinie, d. i. A.

Formel.

$$\text{sin}. A = \frac{\text{cos}. \tfrac{1}{2} B}{\text{cos}. \tfrac{1}{2} b}.$$

Fall 11.

Gegeben die Winkel A an der Grundlinie b, und B an der Spitze.

Gesucht a, d. i. die Schenkel.

Formel.

$$\text{cos}. a = \cot. A . \cot. \tfrac{1}{2} B.$$

Fall 12.

Gegeben die vorigen Stücke.

Gesucht die Grundlinie b.

Formel.

$$\text{cof.}\tfrac{1}{2}b = \frac{\text{cof.}\tfrac{1}{2}B}{\text{fin. A}} \text{ (§. 111. III)}$$

Oder, da cof. a = cot. A. cot. $\frac{1}{2}$B, also a bekannt:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}b = \text{tang. a . cof. A.}$$

Scholion. Mehrere ältere Mathematiker, wie Neper, Wolf, suchten die bisher einzeln angegebenen Fälle für die Resolution sphärischer Dreyecke in kurzen Regeln zusammenzufassen. Allein die richtige Anwendung dieser Regeln fordert selbst wieder die Aufzählung der einzelnen Fälle, nicht nur, wenn man Anfänger im Auge hat, sondern auch in Betreffe des schnellen Gebrauches trigonometrischer Formeln bey wirklich vorkommenden bestimmten Fällen.

Wolf's Regel für die sphärische rechtwinklige Dreyecke lautet, logarithmisch ausgedrückt, so:

„Sinus totus cum cosinu partis mediæ æquatur sinibus sejunctarum et cotangentibus conjunctarum."

Im rechtwinkligen Kugeldreyecke sucht man nämlich immer aus 2 unter 5 gegebenen Stücken das dritte; von diesen dreyen liegt nun immer eines in der Mitte, die übrigen zwey aber liegen entweder unmittelbar daran, oder sie sind durch zwey andere abgesondert. In jenem Falle heißen diese zwey Stücke partes conjunctæ, in diesem partes sejunctæ.

Es seyen z. B. Fig. 40. AB, AC gegeben, und A sey das Gesuchte; so ist A pars media, und AC, AB sind conjunctæ, C und AB aber disjunctæ.

Die Regel für die schiefwinkligen Dreyecke, in welchen man das Perpendikel gefällt hat, drückt Wolf so aus:

„Pars media in primo triangulo cum extrema in secundo æqualis est parti mediæ in secundo cum extrema in primo.“

Im Dreyecke ABC Fig. 45. seyen AC, BC und C gegeben, man sucht nach gefälltem Perpendikel die Seite CD und daraus BD. Nimmt man AD als partem extremam für beyde Dreyecke an: so sind CD und BD mediæ, und C und B conjunctæ extremæ.

Beyde Regeln demonstrirt Wolf in seinen Elem. trigon. sphær. §§. 100, 108, 134.

§. 130.

Lehrs. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreyeckes ist gleich dem Quadrat des Halbmessers durch den Ueberschuß seiner drey Winkel über zwey Rechte multiplizirt, diese sowohl, als jene durch den Halbmesser als die Einheit ausgedrückt.

Beweis. a. Aus der niedern Geometrie muß man sich erinnern, daß man, um die Peripherie

pherie eines Kreises zu haben, nach dem Ludolphischen Verhältnisse setzt:

$$1 : 3,141\ldots = d : p;$$

es ist folglich, wenn ich jene Zahl 3, 141... durch π ausdrücke: jedes Kreises Umfang $p = d\pi = 2r\pi$.

Hiebey ist der Durchmesser $d = 2r = 1$ gesetzt. Nimmt man aber, wie es durchgängig in der Trigonometrie geschieht, den Halbmesser $r = 1$ an: so sagt man, daß 180° 3, 141... Halbmesser lang sind.

Es ist ferner jedes Kreises Flächeninhalt $= d\pi . \frac{d}{4} = \frac{d^2\pi}{4} = r^2\pi$.

Da nun die Oberfläche der Kugel viermal so groß ist, als die Fläche eines größten Kreises, wie in der Stereometrie bewiesen wird: so ist für die Oberfläche der Kugel der Ausdruck $4r^2\pi$, und für die Hälfte $2r^2\pi$ gültig.

Endlich schneiden sich in der Axe der Kugel zwey größten Kreise: so nennt man das zwischen zwey größten Halbkreisen enthaltene Kugelstück den **keilförmigen Ausschnitt.**

Die Größe eines solchen Ausschnitts, so wie seiner sphärischen Oberfläche hängt offenbar ab von der Neigung jener zwey sich schneidenden Kreisflächen zu einander, oder vom Verhältnisse des Bogens,

welcher das Maß jenes Flächenwinkels ist, zum ganzen Kreisumfange.

Man sieht hieraus ein, daß Fig. 37. ist

$$360° : n° = 4r^2\pi : DEdC;$$

folglich $DEdC = \frac{n}{360} \cdot 4r^2\pi = \frac{n}{180} \cdot 2r^2\pi$;

eben so $EDeC = \frac{m}{360} 4r^2\pi = \frac{m}{180} \cdot 2r^2\pi$, wenn nämlich m und n die Graden-Anzahl der bestimmten Bogen bezeichnet.

b. Es sey nun DCE das sphärische Dreyeck für unsern Satz, und sein zu bestimmender Flächeninhalt sey a; so ist

$$dEC = \frac{n\pi}{180} \cdot 2r^2 - a,$$

$$DeC = \frac{m\pi}{180} \cdot 2r^2 - a.$$

c. Verlängert man Cd, Ce bis in die andere Halbkugel um 180° — Cd, und 180° — Ce: so erhält man, wie Fig. 29 ein entgegengesetztes Kugeldreyeck (§§. 90, 91), welches gleich ist dem Dreyecke DEC. Es heiße uns jenes dec, folglich sein Flächenraum auch = a; c und C werden dann zwey sich im Durchmesser entgegengesetzte Punkte seyn. Es seyen nun die Scheitelwinkel DCE = dCe von s Graden; so wird das Dreyeck dCe = dceC —

$$dce = \frac{s\pi}{180} \cdot 2r^2 \cdot - a,$$

d.

d. Es ist aber die Summe der Kugeldreyecks $DEC + dEC + DCe + dCe = 2r^2\pi$ d. i. der halben Kugeloberfläche; folglich ist der Flächeninhalt des Dreyecks DEC, nämlich

$$a = 2r^2\pi - \frac{n\pi}{180} \cdot 2r^2 + a - \frac{m\pi}{180} \cdot 2r^2 + a - \frac{s\pi}{180} \cdot 2r^2 + a$$

$$\text{d. i. } 2a = \left[\frac{n\pi}{180} + \frac{m\pi}{180} + \frac{s\pi}{180} - \pi\right] \cdot 2r^2$$

oder $a = r^2 (D + E + C - 180°)$. §. 84.

Zusatz 1. Will man für einen vorgelegten Fall den Satz in eine Aufgabe verwandeln: so heißt dann die Auflösung so:

Man ziehe von der Summe der drey sphärischen Winkel, oder deren zugehörigen Bogen, die im Verhältnisse zum Halbmesser = 1 im Längenmaße ausgedrückt sind, die Größe $\pi = 3,141\ldots$ d. i. 180° im Längenmaße ab, und multiplizire diesen gefundenen Unterschied durch das Quadrat des Halbmessers der Kugel.

Lambert *) berechnete jene Bogen von Graden, Minuten, Secunden bis auf 27 Decimalstellen.

Auch

*) Supplementa Tabul. Logarith. et Trigonom. Berlin 1770.

Auch findet man im I. B. der oben angeführten logar. trigon. Tafeln von Vega S. 394 eine Tabelle dieser Verwandlung der Bogen für den Halbmesser = 1; aber nur mit 8 Decimalen.

Wie man dergleichen Tafeln verfertigen könne, lehrt unten der §. 28 des Anhanges.

Beyspiel. Es sey $D = 50° = 0{,}873\ldots$

$E = 60° = 1{,}047\ldots$

$C = 150° = 2{,}618\ldots$

Der Halbmesser = 860 Meilen.

Demnach ist

$a = 860^2\,(4{,}538\ldots - 3{,}142\ldots)$

$= 860^2 \cdot 1{,}395\ldots$

$= 739600 \cdot 1{,}395 = 1021\,7{,}420$ □ Meilen.

Zusatz 2. Der Flächenraum eines in Erechtwinkligen Kugeldreyeckes ist also

$= (D + C - 90°)\,r^2$;

eines gleichschenkligen $= (2D + C - 180°) \cdot r^2$;

eines gleichseitigen $= (3C - 180°) \cdot r^2$.

Zusatz 3. Es folgt auch, daß sich verhalten 4π oder 720° zum Ueberschuße der Summe der drey Winkel eines sphärischen Dreyeckes über 180°, wie sich verhält die Oberfläche der Kugel zur Oberfläche dieses Dreyeckes.

Denn die Oberfläche der Kugel $S = 4r^2\pi$ und die des Dreyeckes $a = \vartheta \cdot r^2$ gesetzt, erhellt die Proportion von selbst.

Anmerkung 1. Man sieht, daß der Beweis für unsern Satz eigentlich voraussetzt, daß kein in drey Bogen größter Kreise eingeschlossenes Kugeldreyeck (als unter welcher Bedeutung wir auf gewöhnliche Art das Kugeldreyeck nehmen *) größer seyn könne, als die halbe Kugelfläche. Ungeachtet man diesen Satz als für sich schon einleuchtend halten könnte: führt doch Kästner im nur so zit. B. S. 435 diesen Beweis für ihn an:

Man nehme irgend einen Bogen eines größten Kreises als Grundlinie des Dreyeckes; so muß man noch einen Punkt in der Kugelfläche nehmen, von welchem die Schenkel auf die beyden Gränzen der Grundlinie gehen. Dieser Punkt liegt in einer der beyden Kugelhälften, welche der erst erwähnte größte Kreis macht, also liegen auch in ihr die beyden Schenkel, und folglich die drey Seiten des Kugeldreyeckes.

Anmerk. 2. Viele Mathematiker setzen in der Gleichung für den Flächeninhalt des sphärischen Dreyeckes statt des Quadrats des Halbmessers den Halbmesser einfach.

Diese Verschiedenheit rührt daher: Wir nahmen bey unserem Beweise den Halbmesser als die Einheit an, womit die Bogen, welche des Kugeldrey-

*) Noch eine andre sieh b. Kästner in der 35ten Abh. 10. XXI. der 2ten Samml. geometr. Abh.

eckes Fläche begrenzen, oder die Winkel des Dreyeckes gemessen werden. Nun ist aber die Einheit für die Flächen das Quadrat der Einheit, womit die sie begrenzenden Linien gemessen werden; folglich ist bey uns nothwendig das Quadrat des Halbmessers der eine Faktor des letzten Gliedes der Gleichung, welches den Flächeninhalt des Kugeldreyeckes ausdrückt. Da nun die andern Mathematiker nicht schon in ihrem Beweise von derselben Voraussetzung ausgehen, indem sie $2r \cdot 360^\circ =$ der Oberfläche der Kugel setzen: so sind sie genöthigt, um die Anwendung ihrer Gleichung $a = r(D + E + C - 180^\circ)$ zu lehren, folgende Vorschriften zu geben:

Will man die Fläche in Graden oder Minuten: so nimmt man auch $(D + E + C - 180^\circ) = d$ in Graden oder Minuten, und den Halbmesser r° oder r' (nach §. 15. d. Anhang. Zus.); damit die Größen gleichartig werden. Will man ferner des Dreyeckes Oberfläche in Zollen oder Fußen u. d. gl. so nimmt man den Halbmesser in einem dieser Maße, und reduzirt auch den gefundenen Ueberschuß $= d$ auf eben dasselbe Maß, indem man setzt:

$$\left\{\begin{matrix} r^\circ \\ r' \\ r'' \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} d^\circ \\ d' \\ d'' \end{matrix}\right\} = r \text{ in Zollen} \ldots : d \text{ in Zollen} \ldots$$

Nach dieser geschehenen Reduktion bedient man sich der Logarithmen der natürlichen Zahlen.

Man sieht deutlich, daß vermöge dieser Vorschriften die letzte Gleichung auf die unsrige reduzirt wird.

Drit-

Dritter Abschnitt.

Anwendung der Grundsätze der Berechnung schiefwinkliger Kugeldreyecke.

A. Auf die Feldmeßkunst.

§. 131.

Es trifft sich nicht selten, daß der Geodät die Schenkel der zu messenden Winkel nicht horizontal nehmen kann, wie er es doch nöthig hat, um einen Grundriß verfertigen zu können. Es kann dieser Fall eintreten, wenn die Messung auf beträchtlichen Anhöhen oder Bergen in nicht großer Entfernung von Signalen geschehen muß, wobey z. B. Fig. 48 statt des horizontalen Winkels ACE nur der Winkel BCM könnte gemessen werden; indem nämlich AEQ den Horizont vorstellt.

Hier ist nun eine Reduktion der Winkel auf den Horizont nöthig, sie mögen nun über oder unter demselben genommen seyn. Wie nun diese mittels der sphärischen Trigonometrie auch ohne jene zuletzt deduzirten Formeln, sondern bloß ihren einfachen ersten Grundsätzen gemäß möglich gemacht werde, bleibt uns gegenwärtig zu zeigen.

Fig. 47. 1. Es stelle EH die horizontale Fläche vor, über welche die drey Punkte oder Gegenstände A, B, C in verschiedener Richtung und Entfernung liegen, so, daß sie durch gerade Linien verbunden das Dreyeck ABC bilden. Denkt man sich nun aus ihnen auf die Fläche EA die Perpendikel Bb, Aa, Cc gefällt: so bekömmt man das horizontale Dreyeck abc, dessen Spitzen die Gegenstände A, B, C gerade so vorstellen, wie sie in Grund gelegt werden müssen.

2. Vom Punkte A aus kann man nun ohne Schwierigkeit den Winkel BAC messen. Aus demselben Punkte erhält man den Winkel BAa z. B. auf folgende Art:

Man richtet das Instrument in der Vertikalfläche, die man sich durch AB gelegt denkt, so, daß der eine Arm horizontal steht, der andre aber, indem das Loth die senkrechte Linie Aa bezeichnet, auf B zu seine Richtung hat. Die nun auf dem Instrumente abgeschnittenen Grade geben die Größe des Bogens oder Winkels zwischen dem Senkbley und dem gegen B gerichteten Diopterliniale; d. i. man weiß nun den Winkel BAa.

Auf dieselbe Art mißt man auch den Winkel CAa.

3. Man denke sich nun aus A als dem Mittelpunkte mit beliebigem Halbmesser AD in den Ebenen der Winkel BAC, BAa, CAa die Bogen DF,

DF, DG, GF beschrieben: so hat man ein Kugeldreyeck DGF, in welchem man die Seiten DF, DG, GF, als die Maße der gemessenen Winkel kennt.

Ferner ist der Winkel DGF gleich dem Winkel bac. Denn die geraden Linien ba, ac, weil sie senkrecht auf die gemeinschaftliche Durchschnittslinie Aa der beyden Ebenen Ab, Ac sind, bilden denselben Winkel, als diese Ebenen selbst; folglich einen dem sphärischen Winkel DGF gleichen Winkel (§. 48).

4. Es seyen nun die Winkel BAC $= 82^\circ\ 10'$ BAa $= 77^\circ\ 42'$, CAa $= 74^\circ\ 24'$ gefunden. Um nun G $=$ bac zu finden, nehme man statt des Dreyeckes DGF irgend ein andres schon verzeichnetes z. B. ABC Fig. 44. wo nun BC $= 77^\circ\ 42'$ AC $= 82^\circ\ 10'$, AB $= 74^\circ\ 24'$, und suche den der größte, Seite AC gegenüberliegenden Winkel B.

Zu diesem Ende sey das Perpendikel AD gefällt, und nun suche man nach §. 120. IV. das kleine Segment BD, indem man erst den halben Unterschied beyder Segmente $=$ d durch die Proportion sucht:

tang. $38^\circ\ 51'$: tang. $78^\circ\ 17'$ $=$ tang. $3^\circ\ 53'$: tang. d

oder log. tang. $78^\circ\ 17' = 10{,}6832050$

log. tang. $3^\circ\ 53' = 8{,}8317478$

+ arithm. Erg. log. tang. $38^\circ\ 51' = 0{,}0939569$

log. tang. d $= x\,9{,}6089097$

woraus d mittels der Proportionaltheile $= 22^\circ 6' 53''$. gefunden wird.

Das kleinere Segment $BD = \frac{BC}{2} - d$ ist

folglich = 16° 44′ 7″.

Nach §. 111 II) ist nun:

tang. AB : tang. BD = r : cos. B.

d. i. tang. 74° 24′ : tang. 16° 44′ 7″ = r : cos. B.

oder log. tang. 16° 44′ 7″ + log. r = 19,4781126

+ arithm. Erg. log. tang. 74° 24′ = 89,4459232

also log. cos. B = 108,9240358.

Diesem Logar. entspricht der Cos. 85° 11′ 53″, wodurch also die Größe des Winkels B oder des Horizontalwinkels bac bestimmt ist.

Zusatz 1. Man sieht hieraus, daß man sich um 3° 1′ 53″ geirrt haben würde, wenn man den gemessenen Winkel BAC für den Horizontalwinkel hätte gelten lassen.

Zusatz. 2. Wollte man den Winkel C auf den Horizontalwinkel c reduziren: so verführe man, nachdem man die Winkel ACB, ACc und BCc gemessen hätte, auf ähnliche Art, wie vorher.

Der dritte Winkel b bestimmte sich dann in dem geradlinigen Dreyecke bac von selbst.

II. Auflösung der nämlichen Aufgabe.

In Fig. 48 stellen APQ und PE Vertikalkreise, P das Zenith vor. Demnach ist der von beyden Scheitelkreisen AP, EP, welche durch die

beyden

beyden Schenkel des außer der Horizontalfläche gemessenen Winkels BCM gehen, in P gebildete Winkel, oder der Winkel ACE der auf den Horizont reduzirte Winkel.

Setzen wir nun wieder, daß nebst BM oder BCM = 82° 10′ auch die Bogen BP, MP, welche die von den Schenkeln BC, MC mit der Vertikallinie gebildeten Winkel messen, wie vorher durch Messungen der Winkel BCP = 77° 42′, MCP = 74° 24′ gefunden seyen: so findet man, wenn man jene Bogen oder die Winkel BCM = a, BCB = c, MCP = b setzt, den auf den Horizont reduzirten Winkel P = ACE mittels einer der drey folgenden Formeln:

1) $\sin.\frac{1}{2}P = \sqrt{\left\{\frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b-c).\sin.\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin.b.\sin.c}\right\}}$

§. 126. XXIX.

2) $\cos.\frac{1}{2}P = \sqrt{\left\{\frac{\sin.\frac{1}{2}(a+b+c).\sin.\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin.b.\sin.c}\right\}}$

.XXX.

3. $\cos.P = \frac{\cos.a - \cos.b.\cos.c}{\sin.b.\sin.c}$ §. 121. XII.

Es ist leicht zu ersehen, daß diese Formeln mehr Leichtigkeit sowohl, als Genauigkeit der Berechnung verstatten.

Z. B. nach der zweyten ist dieses die Rechnung:

$\log.\sin.\frac{1}{2}(a+b+c) = \log.\sin. 117° 8' = 9{,}9493645$

$\log.\sin.\frac{1}{2}(b+c-a) = \log.\sin. 34° 58' = 9{,}7582302$

$+ \log. r^2 = 20{,}\ldots$

$-(\log.\sin.b + \log.\sin.c) = -\begin{bmatrix} 9{,}9899148 \\ 9{,}9836996 \end{bmatrix} = -\begin{matrix} 39{,}7075947 \\ 19{,}9736144 \end{matrix}$

$19{,}7339803$

Diesen Logar. durch 2 dividirt, erhält man

$\log. \cos. \frac{1}{2} P = 9{,}8669901$

folglich $\frac{1}{2} P = 42° 36' 28''$

also $P = 85° 12' 56''$.

B. Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf Astronomie.

§. 132.

Aufg. Gleichungen zu finden, um aus drey von diesen Fünfen, Declination, Rectascension, Länge und Breite eines Gestirnes und Schiefe der Ekliptik immer eine der vier erstern Größen zu bestimmen. *)

Fig. 49. **Auflösung.** Es stelle AQ den Aequator, APQ den Colur des Sonnenstillstandes, PC den Colur

*) Deutliche Erklärungen aller hier vorkommenden Begriffe enthält der erste Theil von Bode's Erläuterungen der Sternkunde von S. 45 — 61 2te Aufl.

Colur der Nachtgleiche, P den Pol des Aequators, E den Pol der Ekliptik, welche durch CB geht, vor. In S sey irgend ein Gestirn, dessen Abweichung SD, ihr Complement PS; seine Rectascension CD oder der Winkel CPD; die Breite SL, ihre Ergänzung ES; die Länge CL oder der Winkel CEL der beyden Breitenkreise, durch den Punkt C der Frühlingsnachtgleiche und das Gestirn gezogen. BQ oder EP ist die bekannte Schiefe der Ekliptik.

In dem nun vom Colur, dem Deklinations- und Breitenkreise gebildeten Dreyecke EPS ist also EP die Schiefe der Ekliptik, PS die Ergänzung der Abweichung, ES die Ergänzung der Breite, der Winkel EPS $=90°+$ gerade Aufsteigung, PES $=90°-$ Länge; ESP ist der Positionswinkel.

Es seyen nun EP, PS, EPS gegeben; so findet man nach §. 120. Form. IX durch gehörige Substitution:

$$\cot.PES = \frac{\sin.EP.\cot.PS}{\sin.EPS} - \cos.EP.\cot.EPS.$$

Eben so

$$\cot.EPS = \frac{\sin.EP.\cot.ES}{\sin.PES} - \cos.EP.\cot.PES.$$

Nach Form. XI §. 121 erhält man ebenfalls durch gehörige Substitution:

$$\cos.ES = \cos.PS.\cos.EP + \sin.PS.\sin.EP.\cos.EPS.$$

Eben so

$$\cos.PS = \cos.ES.\cos.EP + \sin.ES.\sin.EP.\cos.PES.$$

Wären

Wären demnach PS und der Winkel EPS unbekannt; so fände man diese aus ES, EP, PES, im Falle diese gegeben wären.

Nennt man demnach die Abweichung $\delta = 90° - PS$

die gerade Aufsteigung $\alpha = EPS - 90°$

die Länge $\lambda = 90° - PES$

die Breite $\beta = 90° - ES$

die Schiefe des Ekliptik $\vartheta = EP$;

so hat man für diese Größen folgende Gleichungen:

1) $\text{tang.}\,\lambda = \dfrac{\text{sin.}\,\vartheta \,.\, \text{tang.}\,\delta}{\text{cos.}\,a} + \text{cos.}\,\vartheta \,.\, \text{tang.}\,\alpha$

2) $\text{sin.}\,\beta = \text{sin.}\,\delta \,.\, \text{cos.}\,\vartheta - \text{cos.}\,\delta \,.\, \text{sin.}\,\vartheta \,.\, \text{sin.}\,\alpha$

3) $\text{tang.}\,\alpha = \text{cos.}\,\vartheta \,.\, \text{tang.}\,\lambda - \dfrac{\text{sin.}\,\vartheta \,.\, \text{tang.}\,\beta}{\text{cos.}\,\lambda}$.

4) $\text{sin.}\,\delta = \text{cos.}\,\vartheta \,.\, \text{sin.}\,\beta + \text{sin.}\,\vartheta \,.\, \text{cos.}\,\beta \,.\, \text{sin.}\,\lambda$.

Zusatz. Nebst diesen wichtigen Formeln führt Hr. Prof. Klügel in der oben angeführten Schrift S. 208. noch folgende nützliche Formel an, wodurch aus drey der vier obigen Größen, ohne auf Schiefe der Ektiplik Rücksicht zu nehmen, jedesmal die vierte mittels einer einzigen Proportion gefunden wird:

$$\text{cos.}\,\lambda \,.\, \text{cos.}\,\beta = \text{cos.}\,\alpha \,.\, \text{cos.}\,\delta$$

Diese Formel wird so deduzirt:

Man denke sich den Bogen CS gezogen; so ist nach §. 111. I.

$$\text{cos.}\,CS = \text{cos.}\,CL \,.\, \text{cos.}\,SL$$

und $\text{cos.}\,CS = \text{cos.}\,CD \,.\, \text{cos.}\,SD$

also $\text{cos.}\,CL \,.\, \text{cos.}\,SL = \text{cos.}\,CD \,.\, \text{cos.}\,SD$.

An-

Anmerk. Sind α und $\lambda > 90°$: so muß das Zeichen ihrer trigonometrischen Funktionen gehörig geändert werden.

In Ansehung der Abweichung u. s. w. ist das zu bemerken, was oben §. 114 in den Beyspielen schon zum Theile beygebracht wurde. Ist nämlich die Abweichung des Gestirnes südlich: so wird cot. PS $=$ cot. $(90° + \delta) = -$ tang. δ; cos. PS $=$ cos. $(90° + \delta) = -$ sin. δ, und sin. PS $=$ sin. $(90° + \delta) = +$ cos. δ. Eben so ist die südliche Breite als negativer Bogen zu betrachten. Kömmt für sin. β, sin. δ ein negativer Werth zum Vorscheine: so zeigt dieser eine der in der Rechnung angenommene entgegengesetzte Breite oder Abweichung an. Der Cosinus δ aber bleibt ungeändert, weil entgegengesetzte Bogen einerley Cosinusse haben.

Beyspiel. Es sey $\vartheta = 23° 27' 58''$; δ südlich $= 15°$, $\alpha = 128°$. Man sucht β und λ nach 2) und 1).

Da man sich aber bey diesen Formeln wegen der vorkommenden Addition und Subtraktion der Logarithmen für die natürlichen Sinusse u. s. w. bedient, so muß die Rechnung so geführt werden:

I. log. sin. $\delta = 9{,}41259\,62 - 10$
$+$ log. cos. $\vartheta = 9{,}96261\,54 - 10$

$0{,}37521\,16 - 1$

Mit-

Mittels der Logarithmentafel für die natürlichen Zahlen findet man die diesem Logarithmus entsprechende Zahl = 0,23725 = A.

Es ist ferner

log. cos. δ 9,9849438 — 10
+ log. sin. ϑ 9,6001084 — 10
+ log. sin. α 9,8965321 — 10

0,4815843 — 1.

Diesem Logar. entspricht die Zahl 0,30309 = B.

Nun ist aber den Bedingungen der Aufgabe gemäß A negativ, (weil sin. δ negativ) und B positiv, folglich nach der Formel ist

$$\sin.\beta = \begin{bmatrix} -\ 0{,}23725 \\ -\ 0{,}30309 \end{bmatrix} = -\ 0{,}54034.$$

Hieraus findet man mittels der Tafeln für die natürlichen Sinusse $\beta = 32^\circ\ 42'$ beynahe, und zwar ist diese Breite südlich, weil wir für sin. β einen negativen Werth erhielten.

II. log. sin. ϑ = 9,6001084 — 10
+ log. tang. δ = 9,4280525 — 10

19,0281609 — 20
— log. cos. α = 9,7893420 — 10

0,2388189 — 1 = log. + 0,17330 als positiver Quotus aus zwey negativen Größen.

Und

Und log. cos. ϑ = 9,9626154 — 10
+ log. tang. α = 10,1071902 — 10

0,0698056 = log. — 1,17437,

weil die Tang. α negativ ist.

Addirt man nun die gefundenen Zahlen: so erhält man tang. λ = — 1,00107, welcher Zahl beynahe entsprechen 45° 1′; folglich ist λ oder die Länge des Gestirnes, weil sie wegen ihres negativ gefundnen Werthes grösser seyn muß, als ein Quadrant, nach unserer Aufgabe = 180° — (45° 1′+) = 134° 59′.

§. 133.

Wenn die Seiten eines schiefwinkligen sphärischen Dreyeckes die Complemente der nördlichen Polhöhe ε, der Abweichung δ und der Höhe η eines Sterns; wenn ferner in den Winkeln eben desselben Dreyeckes das Supplement des Azimuths α, der Stundenwinkel τ, und der parallaktische Winkel σ dieses Sternes sind: so giebt es nach H. Prof. Rüdiger's Aufzählung *) 60 mögliche Fälle, welche insgesammt ihre Auflösung mittels der oben aufgestellten Prinzipien oder Formeln erhalten. Nebst diesen 60 Fällen führt Rüdiger als Beyspiele zur Erläuterung noch mehrere Aufgaben an, wovon ich hier nur einiger erwähnen will.

Aufg.

*) S. dessen Handb. der rechn. Astron. II. B. S. 121. 2te Aufl.

Aufg. 1. Aus der nördlichen Pol-

höhe ε, der Abweichung $= \delta \left\{ \begin{matrix} \text{nördl.} & + \\ \text{südl.} & - \end{matrix} \right\}$

und der Höhe eines Gestirns $= \eta$ die Zeit der Beobachtung zu finden.

Fig. 50. **Auflösung.** In des schiefwinkligen Kugeldreyeckes ZPS Winkeln seyen der Nordpol P, der Scheitelpunkt Z, und der Stern S. Es ist demnach ZP das Complement der Polhöhe $= 90° - \varepsilon = a$; SP das Complement der Abweichung des Gestirns $= 90° - \delta = c$, und SZ das Complement der Höhe desselben $= 90° - \eta = b$. Aus diesen drey gegebenen Stücken findet man den Stundenwinkel ZPS $= x$ mittels der Form. XXIX §. 126, wornach ist

$$\sin. \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\left[\frac{r^2 . \sin. \tfrac{1}{2}(b + c - a) . (\sin. \tfrac{1}{2}(a + b - c)}{\sin. a . \sin. c} \right]}$$

Dieser Stundenwinkel wird dann in Zeit verwandelt, und weiß man noch die Zeit des durchganges eines Gestirnes durch den Meridian: so ist auch Z oder die Zeit der Beobachtung bekannt.

Beyspiel. Es sey $\varepsilon = 51° 32$; $\delta = +29° 39' 10''$ oder nördlich; $\eta = 38° 18' 46''$. Es ist demnach

$$90° - \varepsilon = 38° 28' = a$$
$$90° - \eta = 51° 41' 14'' = b$$
$$90° - \delta = 70° 20' 50'' = c.$$

Und $\tfrac{1}{2}(b + c - a) = 41° 47' 2''$

$\tfrac{1}{2}(a + b - c) = 9° 54' 12''$. Die

Die Logarithmen beyder letztern Größen sammt dem Sinus von r^2 addirt, hat man

$$\left.\begin{matrix} 9{,}8236847 \\ 20{,}\ldots \\ 9{,}2354941 \end{matrix}\right\} = 39{,}0591788$$

Hievon abgezogen

$$\left.\begin{matrix} \log.\sin.a = 9{,}7938317 \\ +\log.\sin.c = 9{,}9739347 \end{matrix}\right\} = 19{,}7677664$$

$$19{,}2914124$$

Diese Zahl durch 2 dividirt, hat man also

$\log.\sin.\frac{1}{2}x = 9{,}6457062.$

Daher $\frac{1}{2}x = 26^\circ\ 15'$;

und $x = 52^\circ\ 30' = \tau = 3$ St. 30′ (in Zeit nämlich verwandelt).

Da nun, wenn die Sonne das Gestirn ist, diese um 12 Uhr culminirt: so ist die Beobachtungszeit Z, wenn die Sonne auf der Ostseite beobachtet worden ist, 8 Uhr 30′ Vormittags; oder wenn sie zur Zeit der Beobachtung auf der Westseite stand, 3 Uhr 30′ Nachmittags.

Aufg. 2. Statt der Höhe eines Gestirnes η, welche nun gesucht werden soll, sey nebst den übrigen Stücken der vorigen Aufgabe der Stundenwinkel τ gegeben.

Auflösung. Da $ZPS = \tau = B$: so hat man nun im Kugeldreyecke zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben, woraus die dritte Seite $ZS = 90^\circ - \eta = b$ gesucht werden soll.

Es ist also nach §. 128. 1 Fall 4.

$$\text{tang. d} = \text{tang. a} \,.\, \text{cos. B}$$
$$= \text{cot.}\,\varepsilon \,.\, \text{cos.}\,\tau$$

$$\text{ferner cos. b} = \frac{\text{cos. a} \,.\, \text{cos. (c—d)}}{\text{cos. d}};$$

$$\text{d. i. sin.}\,\eta. = \frac{\text{sin.}\,\varepsilon \,.\, \text{sin.}\,(\delta + \text{d})}{\text{cos. d}}$$

Beyspp. Es sey $\varepsilon = 52^\circ\, 31'\, 30''$ nördlich

$\delta = 22^\circ\, 12'\, 15''$ + oder nördlich

$\tau = 3$ St. $50'$ als Zeit der ersten Bewegung, welcher in Graden des Aequators entsprechen $57^\circ\, 30'$.

log. cot. ε = 9,3845881

log. cos. τ = 9,7302165, also wegen log. r ist

log. tang. d = 9,6148046

also d = $22^\circ\, 23'\, 14''$

\+ δ = $22^\circ\, 12'\, 15''$

d + δ = $44^\circ\, 35'\, 29''$

log. sin. ε = 9,8996120

log. sin. (δ + d) = 9,8463656

19,7459776

— log. cos. d. = — 9,9659684

Also log. sin. η = 9,7800092

woraus η = $37^\circ\, 3'\, 16''$ die gesuchte wahre Höhe der Sonne.

§. 134.

Aufg. Die Polhöhe eines Ortes mittels der Beobachtung zweyer beliebigen Sterne, deren Abweichung bekannt ist, zu finden.

Auflösung. Hat man sowohl die Zeiten vor der Kulmination t, τ, als nach der Kulmination t′ τ′, wo beyde Sterne A, B sich im Brennpunkte des in einer gewissen Höhe befestigten und um eine vertikale Axe beweglichen Fernrohres befinden, bemerkt: so kann man nun die Stundenwinkel beyder Sterne finden. Denn, wenn man den Gang der Uhr genau kennt, oder wenn man den Quadranten unverrückt stehen läßt, bis die Sterne am folgenden Tage wieder dieselbe Höhe erreichen: so weiß man ihre Umlaufszeit T, d. i. die Zeit, innerhalb welcher sie 360° durchlaufen. Frage ich nun, wie viel Grade sich vom Aequator innerhalb $\frac{t' - t}{2}$ durch den Meridian schieben? so erhalte ich die Antwort aus Fig. 51.

$$T : 360° = \frac{t' - t}{2} : x.$$

Nenne ich also $\frac{t' - t}{2} = \lambda$ und eben so $\frac{\tau' - \tau}{2} = \mu$: so ist der Stundenwinkel MPA für den Stern

$A = \frac{\lambda}{T} \cdot 360° = \varphi$, und der Stundenwinkel

MPB für den Stern B $= \frac{\mu}{T} \cdot 360° = \psi$.

Weiß man nun vollends die Abweichungen beyder Sterne δ und ε: so kennt man auch $PA = 90° - \delta$, und $PB = 90° - \varepsilon$. Die gesuchte Polhöhe heiße β, also $PZ = 90° - \beta$: so hat man im Kugeldreyecke PAZ

$$\text{cos. } ZA = \text{sin. } \beta \text{ . sin. } \delta + \text{cos. } \beta \text{ . cos. } \delta \text{ . cos. } \varphi$$

(§. 121. XI. vergl. mit §. 18. Zus. 3.); und im Dreyecke PBZ ist

$$\text{cos. } ZB = \text{sin. } \beta \text{ . sin. } \varepsilon + \text{cos. } \beta \text{ . cos. c . cos. } \psi.$$

Weil aber $ZA = ZB$: so ist auch

$$\text{sin. } \beta \text{ . sin. } \delta + \text{cos. } \beta \text{ . cos. } \delta \text{ . cos. } \varphi = \text{sin. } \beta \text{ . sin. } \varepsilon + \text{cos. } \beta \text{ . cos. } \varepsilon \text{ . cos. } \psi.$$

Oder $\text{sin. } \beta \text{ (sin. } \varepsilon - \text{sin. } \delta) = \text{cos. } \beta \text{ (cos. } \delta \text{ . cos. } \varphi - \text{cos. } \varepsilon \text{ . cos. } \psi)$;

oder $\frac{\text{sin. } \beta}{\text{cos. } \beta} (\text{sin. } \varepsilon - \text{sin. } \delta) = \text{cos. } \delta \text{ . cos. } \varphi - \text{cos. } \varepsilon \text{ . cos. } \psi$.

Folglich $\text{tang. } \beta = \frac{\text{cos. } \delta \text{ . cos } \varphi - \text{cos. } \varepsilon \text{ . cos. } \psi}{\text{sin. } \varepsilon - \text{sin. } \delta}$ (§. 36 n. 16.)

Schol.

Scholion Man sieht leicht ein, daß diese Methode, die Polhöhe zu finden, von Schubert*) mit allem Rechte gepriesen wird; indem sie die wenigste Zurüstung fordert, das Mikrometer ganz entbehrlich macht, und man sich dazu aller Sterne bedienen kann, wenn man nur ihre Abweichung weiß.

C. Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf mathematische Geographie.

§. 135.

Es sey mir erlaubt, in dieser Hinsicht nur jenes nützlichen Problems kurz zu erwähnen, welchem Herr Prof. Eschenbach eine Abhandlung widmete, als er Herrn Haubold zur Erlangung der juristischen Doctorwürde im Namen seiner Freunde Glück wünschte **).

Aufg. Es sey der Abstand eines aus zwey verschiedenen Orten gesehenen Gegenstandes von der Oberfläche der Erde***), und die Lage eines der beyden Orten bekannt: man soll die Lage des andern Ortes und desjenigen Punktes finden, in dessen Scheitel der Gegenstand gesehen wurde.

*) Man sehe dessen theoret. Astron. 1. Th. S. 45.

**) Lipsiæ 1788. lit. Breitk.

***) Wie man diese finden könne, lehrt Kästner in dissert. „De objecti e duobus locis dissitis vi-

Auflösung. Man muß hiebey mehrere Fälle unterscheiden. Der einfachste ist

I. der, wenn beyde Orte unter demselben Mittagskreise liegen, und demnach der Gegenstand, den man an dem einen Orte im Scheitelpunkte sieht, an dem andern an dem nördlichen oder südlichen Theile des Meridians der Himmelskugel gesehen wird.

Fig. 52. Es erscheine das Phönomen A im Scheitel des Ortes B; des Phönomens wahre Höhe sey AB = a, seine scheinbare aber vom Orte D aus gesehen, sey ADE = p und BC = CD = r d. i. dem Halbmesser.

Was also hier gesucht wird, ist der Unterschied der Breiten beyder Orte B und D, oder der Bogen BD = dem W. BCD.

Nun sind im Dreyecke ACD bekannt der Winkel ADC = ADE + EDC = p + R, mit den Seiten DC = r und AC = a + r.

Aus

$$a + r : \left\{ \begin{matrix} \text{sin.} \\ \text{cos.} \end{matrix} \begin{matrix} (p+R) \\ p \end{matrix} \right\} = r : \text{sin. DAC}$$

findet man den Winkel DAC; hiemit weiß man auch den 3ten BCD oder den Bogen DB.

Diesen Bogen addirt man zur bekannten Breite des Ortes D, wenn das Phönomen von ihm

---

invenienda distantia a superficie terræ" Erfordiæ 1784.

ihm aus nördlich gesehen wurde; das Gegentheil geschieht, wenn A südlich von D aus gesehen wird. Hieraus hat man dann weiter die Breite des Ortes B, und folglich auch des Punktes A, in dessen Zenith der Gegenstand erschien.

Wäre aber die Lage von D unbekannt, und hätte man A gegen Mitternacht von D aus gesehen: so zöge man BD von der bekannten Breite des Ortes B ab; addirte aber dieselbe, wenn A von D aus gegen Mittag gesehen worden wäre.

Alles dieses gilt aber nur für den Fall, wenn der Ort, dessen Breite gegeben ist, in der nördlichen Halbkugel liegt; im entgegengesetzten Falle aber müßte alles umgekehrt werden.

Wäre endlich die gefundene Breite negativ, oder $> 90°$: so würde in jenem Falle der Ort, dessen Breite gesucht wird, eine entgegengesetzte Breite haben, oder in dem andern Erdhemisphäre liegen; im letztern Falle aber würde zwar der Ort auf derselben Seite des Aequators liegen, um aber seine wahre Breite zu haben, müßte der Bogen BD von $2\,R = 180°$ abgezogen werden.

II. Fall. Wenn zwar das Objekt A im Zenith des einen Ortes zu sehen ist; aber außerhalb des Meridians des andern Ortes.

Es seyen beyde Orte wieder B, dessen Lage man weiß, und D; P der Pol: so ist der Winkel PBD Fig. 53.

PBD $=\gamma$ das Azimut des aus B gesehenen Gegenstandes, PB das Complement der Länge des Ortes B; PD der Abstand des Ortes D vom Pol, und der Winkel BPD $=\eta$ der Unterschied der Längen beyder Orte.

Um nun die Aufgabe für diesen Fall zu lösen; muß man nachdem der Bogen BD, wie vorher bestimmt worden, aus diesem Bogen, als dem Abstande beyder Orte, und dem beobachteten Azimut die Breite und Länge des andern Ortes finden.

Um dieses zu thun, muß bestimmt werden, ob das Perpendikel innerhalb des Dreyeckes BPD fällt, oder außerhalb desselben. Dieses geschieht mittels der ohnedieß anzustellenden Proportion

$$1 : \text{cos.}\,\gamma = \text{tang.}\,BP : \text{tang.}\,BA$$ (§. 111. II.).

Wenn nun durch Rechnung BD $>$ BA gefunden wird: so fällt das Loth innerhalb des Dreyeckes, im entgegengesetzten Falle aber außerhalb. Dann hat man nach §. 120. II)

$$\text{cos.}\,BA : \text{cos.}\,BP = \text{cos.}\,DA : \text{cos.}\,PD;$$

woraus man folglich den Abstand des Ortes D vom Pol oder das Complement der Breite findet; wobey nur noch zu bemerken, daß AD $= \pm$ BD $\mp$ BA für beyde obige Fälle, folglich bekannt ist.

Um den Unterschied der Länge beyder Orte zu finden; muß man beyde Winkel ABP $=\zeta$ und APD $=\vartheta$ bestimmen, woraus man erhält $\eta = \zeta \pm \vartheta$. Man setze also

sin.

$$\text{sin. BP} : 1 = \text{sin. BA} : \text{sin. } \zeta$$
$$\text{und sin. PD} : 1 = \text{sin. DA} : \text{sin. } \vartheta .$$

III. Fall; wenn der Punkt, in dessen Zenith das Phönomen gesehen wird, von beyden Beobachtungsorten absteht.

Es seyen wieder B, dessen Länge und Breite man weiß, und D, dessen Länge man sucht, diese beyden Orte. Das Phönomen erscheine im Scheitel des Punktes C der Oberfläche der Erde, P ist der Pol. Man muß nun mittels der bekannten wahren Höhe des Objektes, und seiner in B und D beobachteten Winkelhöhe, die Bogen BC und CD nach oben angegebener Art bestimmen. Bekannt sind dann PB, BC, CD und beyde Azimute PBC $= \gamma$, PDC $= \delta$, woraus man sucht PC, BPC $= \eta$, PD und CPD $= \lambda$. Fig. 54.

Man hat hier 2 sphärische Dreyecke aufzulösen. Setzt man den Winkel PCB $= \varepsilon$: so hat man zur Resolution des Kugeldreyeckes PCB folgende Gleichungen:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(\varepsilon + \eta) = \frac{\text{col. } \frac{1}{2}(\text{BP} - \text{BC})}{\text{col. } \frac{1}{2}(\text{BP} + \text{BC})} \cdot \cot \tfrac{1}{2}\gamma$$

(§. 125. XXVII.)

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \eta) = \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(\text{BP} - \text{BC})}{\text{sin. } \frac{1}{2}(\text{BP} + \text{BC})} \cdot \cot. \tfrac{1}{2}\gamma$$

. XXVI.

$$\text{Ferner } \sin. PC = \frac{\sin. \gamma . \sin. BC}{\sin. \eta}.$$

Für das Kugeldreyeck CDP bestimmt man, wie zuvor, λ durch

$$\sin. \lambda = \frac{\sin. \delta . \sin. DC}{\sin. PC};$$

und dann gilt für die dritte Seite

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} PD = \frac{\text{cos.} \tfrac{1}{2} (\delta + \lambda)}{\text{cos.} \tfrac{1}{2} (\delta - \lambda)} . \text{tang.} \tfrac{1}{2} (PC + CD)$$

XXIII;

und für den 3ten Winkel $PCD = \pi$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} \pi = \frac{\text{cos.} \tfrac{1}{2} (PC - CD)}{\text{cos.} \tfrac{1}{2} (PC + CD)} . \text{cot.} \tfrac{1}{2} (\delta + \lambda) . \text{XXVII.}$$

Beyspiel. Man habe zu Würzburg irgend ein Phönomen z. B. eine kleine Wolke unter der Winkelhöhe von 4 Graden gegen O g S $\frac{3}{4}$ O gesehen, so, daß folglich $\gamma = 92° 48' 45''$ ist; man verlangt nun den Ort zu wissen, in dessen Scheitelpunkt dieses Phönomen stand, und welches der Ort sey, von dem aus eben dasselbe in einer Höhe von 5 Graden gegen NW gesehen werden konnte, wo also $\delta = 45°$.

Es ist hier $p = 4°$, und in Ansehung des
Fig. 52. andern Ortes $= 5°$; aber a oder die wahre Höhe sey $= 3807$ Toisen; der Erdhalbmesser $r = 3368554$ Toisen.

Man suche nun hieraus, wie in Fall I, DAC.

log.

log. cof. p = 9,9983442

$$\log.\left\{\frac{r}{a+r}\right\} = \underline{0{,}9994944 - 1}$$

log. fin. DAC = 9,9978386.

Hieraus hat man DAC = 84° 17′ 18″; also BCD = 180° — (95° + 84° 17′ 18″) = 0° 42′ 42″ = BD; d. i. dem Abstande des andern Ortes von dem Punkte, in dessen Scheitel die Wolke zu sehen war; oder für unsere gegenwärtige Figur ist DC = 0° 42′ 42″. Eben so findet man aus

log. cof. p = 9,9989408

$$\log.\left\{\frac{r}{a+r}\right\} = \underline{0{,}9994944 - 1}$$

log. fin. DAC = 9,9984352.

Also DAC = 85° 8′ 21″; daher BCD = 180° — (94° + 85° 8′ 21″) = 0° 51′ 39″ = BD d. i. dem Abstande jenes Punktes von Würzburg = BC nach Fig. 54. Ferner, weil die Breite Würzburgs 49° 46′ 6″, ist BP = 40° 13′ 54″. Demnach ist

$\frac{1}{2}$(BP — BC) = 19° 41′ 7″

$\frac{1}{2}$(BP + BC) = 20° 32′ 41″

Diese Werthe vorausgesetzt, steht nun die Rechnung nach obigen Gleichungen auf folgende Weise:

log.

log. cot. $\frac{1}{2}\gamma$ = 9,9786751
log. cos. $\frac{1}{2}$ (BP − BC) = 9,9738466
+ arithm. Erg. log. cos. $\frac{1}{2}$ (BP + BC) = 0,0285393
log. tang. $\frac{1}{2}(\varepsilon+\eta)$ = 19,9608851

Also $\frac{1}{2}(\varepsilon+\eta)$ = 43° 45′ 3″

Ferner log. cot. $\frac{1}{2}\gamma$ = 9,9786751
log. sin. (BP − BC) = 9,5274409
+ arithm. Erg. log. sin. (BP + BC) = 0,4547691
log. tang. $\frac{1}{2}(\varepsilon-\eta)$ = 9,9608851

Also $\frac{1}{2}(\varepsilon-\eta)$ = 42° 25′ 23″;
also η = 1° 19′ 40″
und ε = 86° 10′ 26″.

Ferner log. sin. γ = 9,9994765
log. sin. BC = 8,1767798
18,1762563
− log. sin. η = − 8,3649639
log. sin. PC = 9,8112924.

Also PC = 40° 21′ 33″ (PC aber muß < 90° genommen werden, weil BP < 90°).

log. sin. CD = 8,0941423
log. sin. δ = 9,8494850
17,9436273
− log. sin. PC = − 9,8112924
log. sin. λ = 8,1323349.

Also λ = 0° 46′ 37″;
folglich $\frac{1}{2}(\delta+\lambda)$ = 22° 53′ 18″
und $\frac{1}{2}(\delta-\lambda)$ = 22° 6′ 41″;
auch ist $\frac{1}{2}$(PC − CD) = 19° 49′ 25″
$\frac{1}{2}$(PC + CD) = 20° 32′ 7″.

Da-

Daher log. tang. $\frac{1}{2}$(PC+CD) = 9,5735523
log. cos. $\frac{1}{2}$ (δ + λ) = 9,9643844
+ arithm. Erg. log. cos. $\frac{1}{2}$ (δ — λ) = 0,0331762

log. tang. $\frac{1}{2}$ PD = 9,5711129

Also $\frac{1}{2}$ PD = 20° 25′ 47″, oder P = 40° 51′ 34″.

Und log. cos. $\frac{1}{2}$(PC—CD) = 9,9734701
log. cos. $\frac{1}{2}$ (δ + λ) = 10,3745058
arithm. Erg. log. cos. $\frac{1}{2}$(PC+CD) = 0,0285124

log. tang. $\frac{1}{2}\pi$ = 10,3764883

Also $\frac{1}{2}\pi$ = 67° 12′ 18″; oder π = 134° 24′ 36″.

Aus dieser Berechnung ist also ersichtlich, 1) daß der Ort, in dessen Scheitel die kleine Wolke stand, in der nördlichen Breite = 90° — PC = 49° 38′ 27″ liege; 2) daß, weil η = 1° 19′ 10″, und wenn man die Länge Würzburgs setzt = 27° 53′ 45″, die Länge eben jenes Ortes sey = 29° 13′ 25″; 3) daß, weil π + ε = 220° 35′ 2″ d. i. < 2 R, das aus B und D gesehene Phänomen außerhalb der Ebene des durch B und D gehenden größten Kreises seinen Stand hatte; 4) daß endlich, weil PD = 40° 51′ 34″, dasselbe Phänomen von einem Orte, dessen nördliche Breite = 49° 8′ 26″, und weil der Unterschied der Längen beyder Orte B, D = η + λ = 2° 6′ 17″, dessen Länge ist 30° 0′ 2″, unter der scheinbaren Höhe von 5° in dem Scheitelkreise, welcher 45° von Norden gegen Abend abweicht, konnte gesehen werden.

An-

Anmerkung. Weil viele meiner Leser jene Abhandlung Kästners nicht zur Hand haben dürften; so will ich hier die Auflösung der genannten zur praktischen Geometrie gehörigen Aufgabe: den Abstand des Meteors von der Oberfläche oder dem Mittelpunkte der Erde zu finden — ganz kurz nachweisen.

Tab. VI. Fig. 56. Es stelle NDSQN die Oberfläche der Erde und S den Süd, N den Nordpol vor. Die größten Kreise NDS, NFS seyen die Mittagskreise der Orte D und F, von denen aus die Lufterscheinung E zugleich beobachtet wird. Die gleichen Halbmesser CF, CD stellen verlängert die Scheitellinien der Beobachter in F und D vor.

Die Ergänzung des in F beobachteten Erhöhungswinkels oder der Höhe von E zu 90° giebt den Abstand des Meteors vom Zenith des Beobachters, oder den Winkel EFM $= \eta$; eben so kenne man den Abstand dieses Gegenstandes vom Zenith des Beobachters in D in demselben Augenblicke $=$ EDP $= \lambda$.

Denkt man sich nun eine gerade Linie aus E nach C gezogen, welche die Erdoberfläche in R schneidet: so ist ER der Abstand des Gegenstandes von der Erdfläche, und EC dessen Weite von ihrem Mittelpunkte.

Die Vertikalebenen ECM, ECP schneiden ferner die Erdoberfläche in den Bogen RF und RD; demnach sind die sphärischen Winkel RFN $= \alpha$ und

RDN

RDN = β des Meteors E Abweichung von den Mittagsflächen der Orte F und D, oder die Winkel, welche von jenen Vertikalflächen mit den Mittagsflächen dieser Orte gebildet werden, d. h. RFN ist das Azimuth des Gegenstandes E für den Beobachter in F und RDN das Azimuth für den Beobachter in D; und zwar entweder östlich oder westlich, jenachdem E ost- oder westwärts der Mittagsfläche beobachtet worden ist.

Weiß man nun mittels der Beobachtung auch diese Azimuthe: so findet man EC auf folgende Art:

Der größte Kreisbogen FD = a, den man sich durch D und F gezogen denkt, kann leicht bestimmt werden, wenn man die geographische Breite beyder Orte, folglich auch ihre Ergänzungen zu 90°, also die Abstände dieser Orte von dem Pole N, d. i. die Bogen NF = c, ND = b und den Winkel DNF = A, oder den Unterschied der Mittagskreise der Orte F und D weiß. Denn im sphärischen Dreyecke FND ist

cos. a = cos. A . sin. b . sin. c + cos. b . cos. c. §. 121. XI.

Man kann demnach auch die Winkel NFD = φ und NDF = ψ nach Falle 4 oder Falle 1 §. 128. berechnen.

Dadurch kennt man nun im sphärischen Dreyecke FDR 1. den Winkel RFD = φ — α; 2. den Winkel RDF = ψ — β, und 3. den zwischenliegenden Bogen FD = a. Man kann also in diesem Dreyecke die Seiten RF = ζ und RD = ϑ nach einer der Formeln im Falle 5 §. 128. berechnen.

Nun

Nun ist aber RF das Maß des Winkels FCR, folglich ist im Dreyecke EFC der Winkel EFM $= \eta$, also CFE $= 180° - \eta$; ferner ECF $= \zeta$ und FEC $= \eta - \zeta$ bekannt; woraus man also

$$CE = \frac{\sin. \eta}{\sin.(\eta - \zeta)} . CF$$

d. i. den gesuchten Abstand des Gegenstandes E vom Mittelpunkte der Erde in dem Maße findet, in welchem der Erdhalbmesser CF ausgedrückt wurde. *)

D. Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf Gnomonik.

§. 136.

Die ganze Gnomonik, sagt Klügel in seinem mehrmals genannten Buche S. 198, in sofern sie die Schattenlinien auf einer ebenen Fläche verzeichnen lehrt, ist eigentlich nur ein einziges Problem der sphärischen Trigonometrie. Die Sonne beschreibt im scheinbaren Systeme um die Axe der Erde in gleichen Zeiten gleiche Winkel. Man stelle sich bloß die Fläche des Aequators nebst der Erdaxe, diese auf jene wie eine Stange lothrecht aufgerichtet, vor: so wird der Schatten dieser Stange um der Erde Mittelpunkt in gleichen Zeiten gleiche Winkel auf dem Aequator beschreiben.

Wenn

*) Man vergleiche Tob. Mayer's gründl. und ausf. Unterricht zur prakt. Geomet. 2te Aufl. von S. 333 — 341.

Wenn nun dieser Schatten von jeder andern Ebene, die durch den Mittelpunkt des Aequators geht, aufgefangen wird, und die Bewegung des Schattens auf derselben verzeichnet werden soll: so kömmt es darauf an, aus der Lage der Stundenkreise untereinander und eines aus denselben gegen die gegebene Ebene den Winkel der Durchschnitte beyder Stundenkreise mit der Ebene zu finden.

Es stelle daher AEQ den Aequator vor, APQ Fig. 48. den Mittagskreis des gegebenen Ortes, P den Nordpol, PC die Erdaxe, PME einen jeden andern Stundenkreis, dessen Lage gegen PA, die der Winkel APE ist, durch die Zeit gegeben wird. Wie sich nämlich 24 Stunden zur gegebenen Zeit Vor- oder Nachmittags verhalten: so verhalten sich 360° zu APE; welcher Winkel auf der östlichen oder westlichen Seite des Meridians zu nehmen ist, je nachdem die Zeit, von Mittage an gerechnet, Vor- oder Nachmittagsstunden sind.

Die Ebene, von welcher der Schatten aufgefangen wird, sey BCD, welche den Aequator in BD, den Meridian in BC, den Stundenkreis in MC schneidet, und von deren Durchschnitt mit der Kugelfläche der Bogen BMD ein Theil ist.

Die Lage dieser Ebene sey ferner durch den Winkel PBM mit dem Meridian, und durch den Winkel BCP ihres Durchschnittes mit demselben und der Axe gegeben. Auf diese Lage der gegebenen

Ebene muß man eine jede andere gegebene Lage derselben Ebene mittels der sphärischen Trigonometrie zurückführen.

Der Punkt A bezeichne Süd, so daß die Sonne zu einer gewissen Zeit Vormittags in dem Stundenkreise PME sey. Der Schatten der Axe erhält alsdann in Ansehung des Aequators die Richtung EC, und in Rücksicht der gegebenen Ebene die Richtung MC, welche Richtungslinien verlängert jenseits C fallen. Mittags ist des Schattens Richtungslinie auf den Aequator die Linie AC, auf der gegebenen Ebene die Linie BC. Auf dieser Ebene hat demnach der Schatten der Axe den Winkel BCM, und auf dem Aequator den Winkel ACE, im Verhältnisse mit der Zeit beschrieben. Beyder Winkel Maße sind die Bogen BM und AE, letzterer mißt auch den Winkel BPM oder APE. Dieser Winkel ist aber durch die Zeit gegeben; auch ist der Winkel PBM und der Bogen PB, als das Maß des Winkels BCP, im sphärischen Dreyecke BPM bekannt; folglich kann man nun aus dem gegebenen Bogen und den 2 anliegenden Winkeln den Bogen BM, folglich den Schattenwinkel (d. i. den Winkel der Schattenlinie mit der Mittagslinie) auf der Ebene finden.

Es ist nämlich nach Falle 5. §. 128.

$$\cot. BM = \frac{\sin. PBM . \cot. BPM}{\sin. BP} + \cot. BP$$

$$. \cos. PBM.$$

Wegen der einmal bestimmten Lage der den Schatten auffangenden Ebene BCD ist in dem Werthe für cot. BM außer cot. BPM alles unveränderlich. Wäre dieselbe z. B. eine horizontale Fläche: so würde $B = 90°$; daher $\sin. B = 1$, $\cos. B = 0$ (§. 18). Nun ist für diesen Fall auch BP die Entfernung des Pols vom Horizonte $= \beta$; folglich ist

$$\cot. BM = \frac{\cot. BPM}{\sin. \beta}$$

oder $\tang. BM = \tang. BPM . \sin. \beta$.

Wäre aber BCD eine vertikale Fläche: so würde, weil itzt BP die Entfernung des Ortes vom Pole ist, sin. BP der Cosinus der Polhöhe und cot. BP die Tangente derselben.

Noch hat man bey dem Gebrauche obiger Formel zu merken, daß, wenn der Winkel der Ebene mit dem Meridian auf der Ostseite nach Norden hin stumpf wird, cos. BPM negativ, folglich für die Vormittagsstunden cos. PBM . cot. BP verneinend werde. Eben dieses Produkt wird negativ; wenn $BP > 90°$, oder wenn die Ebene den Halbkreis APQ zwischen P und Q schneidet.

Eine weitere Auseinandersetzung dieser Materie würde hier am unrechten Orte stehen. *)

E. Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf Stereometrie.

§. 137.

Denkt man sich **) aus den Durchschnittspunkten dreyer größter Kreisbogen, welche ein sphärisches Dreyeck auf der Oberfläche der Kugel bilden, gerade Linien auf den Mittelpunkt der Kugel gezogen, deren jede mit der andern eine ebene Fläche begrenzt: so erhält man eine Pyramide, deren Grundfläche jenes sphärische, oder wenn man sie unendlich klein nimmt, ein ebenes Dreyeck ist; — oder mit andern Worten — einen pyramidalischen von einem sphärischen Dreyecke begrenzten Ausschnitt; und die an seiner Spitze gebildeten Winkel haben dann jene drey größten Kreisbogen zum Maße. Ein solcher pyramidalischer Ausschnitt ist nun im Grunde nichts anders, als eine dreyseitige körperliche Ecke, deren Spitze im Mittelpunkte der Kugel ist, mit Zugabe der Maße der sie eben da einschließenden Winkel; aber als Maß des so formirten

---

*) Einen kurzen deutlichen Begriff von Gnonomik giebt Clemm im 2ten Th. seines mathem. Lehrb. S. 303—312.

**) Man vergleiche hiermit das im §. 83 Gesagte.

mirten körperlichen Winkels nimmt man eben jenes sphärischen Dreyeckes Fläche an. Obgleich nun das sphärische Dreyeck kein Körper, sondern eine krumme Fläche ist: so hat man doch auch vermöge obiger Vorstellungsart die dreyseitige körperliche Ecke sphärisches Dreyeck genannt; als solches kann man demnach jede körperliche Ecke betrachten.

Es stelle nun Figur 55. ein viereckiges Prisma oder Parallelepipedum vor. Um dessen Inhalt zu finden, multiplizirt man nach der Sprache der Mathematiker die Grundfläche mit der Höhe. Es sey nun die erstere gegeben, auch seyen die Seiten der Ecke A, nämlich CAD, BAD, BAC bekannt. Es wäre demnach, um den Inhalt des vorgegebenen Körpers zu finden, noch die durch Bi vorgestellte Höhe zu bestimmen.

Nun ist nach §. 61. Bi : AB = sin. P : 1, d. i. Bi = AB . sin. P. Es ist aber Bb, das Perpendikel eines rechtwinkligen sphärischen oder körperlichen Dreyeckes, das Maß von P, und BAD = BE d. i. die Hypotenuse; folglich nach §. 106. Zus. ist

r : sin. BE = sin. p : sin. Bb

d. i. wenn man den Halbmesser wieder = 1 setzt, sin. P = sin. BAD . sin. p. Also ist Bi = AB . sin. BAD . sin. p. Hierin bleibt nun noch sin. p zu bestimmen. Man findet aber dessen Werth aus §. 126 XXIX.

Es ist demnach der Inhalt dieses Körpers, wenn b die Grundfläche bezeichnet, $= a \cdot AB \cdot \sin. BAD \cdot \sin. p$; ferner der Inhalt einer Pyramide oder eines Kegels $= \frac{1}{3} a \cdot AB \cdot \sin. BAD \cdot \sin. p$, u. s. w.

Hier vergleiche man den kurzen Lehrbegr. d. Mathem. von Schulz S. 350. ff.

Anhang.

Einleitung.

Erste Begriffe und Grundsätze der Differenzenrechnung.

§. 1.

Erklärung 1. Die Größen einer Gleichung, welche als solche betrachtet werden, deren Werthe sich beliebig ändern lassen, heißen veränderliche (quantitates variabiles), diejenigen aber, welche bey aller Aenderung der Werthe jener Größen immer denselben Werth behalten, nennt man beständige Größen derselben Gleichung (quantitates constantes).

Fällt man aus dem Punkte J des Umfanges eines Kreises Fig. 3. das Loth auf den Durchmesser AH: so sieht man klar ein, daß bey allen wechselseitigen Veränderungen der einander entsprechenden Linien AD, JD in diesem Kreise der Durchmesser AH stets denselben Werth behalte. Nun heißt in der höheren Geometrie AH die Abscissenlinie = a, das Stückchen AD die Abscisse = x, das entsprechende Perpendikel JD die Ordinate = y; auch ist nach geometrischen Grundsätzen

$$AD : JD = JD : DH$$

d. i. $x : y = y : a - x$.

folglich ist die für den Kreis geltende Gleichung $y^2 = ax - x^2$. In dieser Gleichung betrachtet man also die Abscisse und Ordinate als veränderliche Größen, als einzige beständige Größe aber den Durchmesser.

Sollte aber für eine gegebene Abscisse die entsprechende Ordinate in allen möglichen Kreisen gesucht werden: so würde die Abscisse als beständig $= b$, und der Durchmesser als veränderlich $= z$ betrachtet, und die Gleichung für den Kreis in diese: $y^2 = bz - b^2$ verwandelt.

Zusatz. Man bezeichnet allgemein die veränderlichen Größen, wie die unbekannten, die beständigen, wie die bekannten in der Analysis.

§. 2.

Erklärung 2. Jede Größe, deren Werth von einer oder mehreren veränderlichen Größen abhängt, nennt man eine Funktion dieser letztern.

Zusatz 1. Diese ist folglich selbst eine veränderliche Größe, und jede veränderliche Größe, deren Funktion sie ist, ist selbst wieder eine Funktion von ihr und den übrigen veränderlichen Größen. So ist in der vorigen Gleichung (§. 1) y eine Funktion von x, und x eine Funktion von y.

Zusatz 2. Es können ferner die veränderlichen Größen, von denen die Funktion abhängig ist, an sich schon von einander abhängig seyn oder nicht;

nicht; wie die Größen x, y, von welchen z in der Gleichung $az^2 = bxy + y^2$ eine Funktion ist.

§. 3.

Erklärung 3. Um die Beschaffenheit einer jeden Funktion genau zu erkennen, muß man die Art und Größe ihrer Abhängigkeit von den veränderlichen Größen, von welchen ihr Werth abhängt, bestimmen. Dieses geschieht jedesmal, (da eine jede Gleichung eine Proportion ausdrückt,) durch die Beantwortung der Frage:

Wenn drey veränderliche Größen um einen gewissen Theil zu- oder abnehmen, um wie viel nimmt dadurch die Funktion selbst ab oder zu? und welches ist also der Exponent des geometrischen Verhältnisses, in welchem die Zu- oder Abnahme der Funktion zur Zu- oder Abnahme ihrer veränderlichen Größen stehen?

Wollte man z. B. die Natur von x, welche in der Gleichung $x = y^2$ eine Funktion von y ist, erkennen: so dürfte man nur das Verhältniß der wechselseitigen Veränderungen dieser Größen bestimmen. Gesetzt nämlich, x wachse um den Theil X, wenn y um die beliebige Größe Y wächst: so erhalten wir aus $x = y^2$ die Gleichung:

$$x + X = (y + Y)^2 = y^2 + 2yY + Y^2;$$

woraus, weil $x = y^2$ ist, $X = 2yY + Y^2$, und

$$\frac{X}{Y} = 2y + Y$$ gefunden werden.

Man

Man sieht also hier, daß wenn y um Y wächst, x um $2yY + Y^2$ (=X) wachsen müsse, und das folglich die Zunahme von x die Zunahme von y um die Summe der doppelten Größe y und ihrer Zunahme Y übersteigt.

Man erkennt demnach aus diesem Verhältnisse der beyderseitigen Veränderungen von x und y die Natur der Funktion x vollkommen.

Die Wissenschaft nun, welche dieses Verhältniß der wechselseitigen Zu- oder Abnahmen der veränderlichen Größen und der Funktion bestimmen lehrt, nennt man die Differenzenrechnung; welchen Namen die höhere Analysis aus dem Grunde erhält, weil die Zu- und Abnahme der Funktion, womit sich dieselbe beschäftigt, die Differenz zwischen der unveränderten und veränderten Funktion, nämlich $X = (x + X) - x$ ist.

Zusatz 1. Da die Abnahme eine negative Zunahme, folglich die Größe, um welche eine veränderliche Größe, oder ihre Funktion abnimmt, bloß als eine Negativgröße anzusehen ist: so kann man die Differenzenrechnung so behandeln, als ob sie es bloß mit der Zunahme der veränderlichen Größen und ihrer Funktionen zu thun hätte.

Zusatz 2. Jede Zunahme, welche eine bestimmte endliche Größe ist, wird in dieser Wissenschaft mit △ bezeichnet.

Zusatz 3. Sobald hingegen die Zunahme einer veränderlichen Größe x nämlich Δx als unendlich klein betrachtet wird, so, daß Δx gegen x und hiermit gegen jede andere Größe, zur Abkürzung der Rechnung, als verschwunden angesehen werden kann; nennt man die Zunahme das Differential der Größe. Vor diesen in dem Zustande, wo man sie in Nullen verwandelt, betrachteten Zunahmen setzt man statt Δ den Buchstaben d; so bezeichnet dx, dy... das Differential von x, y... Da ferner, wenn die Zunahme der veränderlichen Größe Null wird, auch die Zunahme der Funktion selbst Null wird; so nennt man auch die Zunahme der Funktion, in diesem Zustande betrachtet, das Differential derselben.

Das Differential einer Funktion finden, heißt sie differentiiren.

Zusatz 4. Also ist die Differentialrechnung, kurz ausgedrückt, die Wissenschaft, eine jede gegebene Funktion zu differentiiren, oder ihr Differential, mithin auch das Verhältniß ihres Differentials zum Differential einer jeden ihrer veränderlichen Größen, oder eine Differentialgleichung zu finden.

§. 4.

Erster Grundsatz. Es ist für die Zunahme Δz der Funktion z einerley, ob die Gleichung für diese Funktion beständige

Größ-

Größen, die mit den veränderlichen bloß durch Addition oder Subtraktion verbunden sind, enthält oder nicht.

Denn für beständige Größen findet gar keine Zunahme statt (§. 1. d. A.)

So ist, wenn $z = x$, $z + \Delta z = x + \Delta x$ (§. 3. d. A.), also $\Delta z = \Delta x$; und wenn $z = x + a - b$ ist: so ist $z + \Delta z = x + \Delta x + a - b$; daher wieder $\Delta z = \Delta x$.

Oder

$b + y = x - c$ giebt $dy = dx$.

Zusatz. Ist aber die beständige Größe der Coeffizient einer veränderlichen: so ist sie auch in der Gleichung für die Zunahme der Funktion der Coeffizient der Zunahme jener veränderlichen Größe.

So wird, wenn $z = ax$, $z + \Delta z = a(x + \Delta x)$

$= ax + a\Delta x$, also $\Delta z = a\Delta x$, und $\frac{\Delta z}{\Delta x} = a$; d. i.

in diesem Falle ist das Differenzialverhältniß dem Coeffizienten der veränderlichen Größe gleich.

Eben so giebt $b + y = ax - c$ die Differenzialgleichung

$$dy = adx; \text{ folglich } \frac{dy}{dx} = a.$$

§. 5.

Zweyter Grundsatz. Wenn in der Gleichung einer Funktion ihre veränderlichen

lichen Größen bloß durch Addition oder Subtraktion verbunden sind: so stehen ihre Zunahmen in der Gleichung für die Zunahme der Funktion in eben dieser Verbindung.

Wenn $z = ax + by - cv$: so ist $z + \Delta z = ax + a\Delta z + by + b\Delta y - (cv + c\Delta v)$ (§. 4).

Daher $\Delta z = a\Delta z + b\Delta y - c\Delta v$.

Oder, wenn $y = x + z - v$: so ist die Differenzialgleichung

$$dy = dx + dz - dv.$$

§. 6.

Dritter Grundsatz. Wenn in der Gleichung der Funktion ihre veränderlichen Größen durch Multiplikation verbunden sind: so erhält man die Differentialgleichung, wenn man das Differetial jeder einzelnen veränderlichen Größe so sucht, als wären die übrigen beständige Größen; und dann die Produkte summirt.

Wenn $z = xy$: so ist $z + \Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) = xy + y\Delta x + x\Delta y + \Delta x.\Delta y$.

Also $\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x.\Delta y$;

Daher $\frac{\Delta z}{\Delta x} = y + x.\frac{\Delta y}{\Delta x} + \Delta y$.

Also für den Fall, wo die Zunahme der veränderlichen Größe in dem Zustande, da man sie in

Nullen

Nullen verwandelt, folglich die Produkte aus den Zunahmen als verschwindend betrachtet, ist

$$dz = xdy + ydx;$$

folglich $\frac{dz}{dx} = x \cdot \frac{dy}{dx} + y$, und $\frac{dz}{dy} = y \cdot \frac{dx}{dy} + x$.

Eben so:

$$d(xyz) = zd(xy) + xydz = xydz + xzdy + yzdx.$$

Oder:

$$d(vxyz) = yzd(vx) + vxd(yz) = vxydz + vxzdy + vyzdx + xyzdv.$$

§. 7.

Vierter Grundsatz. Wenn in der Gleichung einer Funktion ihre veränderliche Größe zur Potenz erhoben vorkömmt: so erhält man die Differentialgleichung, wenn man die veränderliche Größe unter dem vorigen um 1 verminderten Exponenten mit dem ungeänderten Exponenten und dem Differential der Größe selbst multiplizirt.

Dieser Grundsatz erhellt aus dem vorhergehenden.

Denn man setze, in $z = xy$ sey $y = x$: so hat man nun $z = x^2$, und $\Delta z = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$;

ferner $\frac{\Delta z}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

Ist $z = x^2$, $x = x^3$: so ist

$$\Delta z = 3x^2 . \Delta x + 3x . \Delta x^2 + \Delta x^3 ; \text{ und}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = 3x^2 + 3x . \Delta x + \Delta x^2 .$$

Ist allgemein $z = x^m$: so ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$\Delta z = mx^{m-1} \Delta x + \frac{m . m-1}{1 . 2} x^{m-2} . \Delta x^2$$

$$+ \frac{m . m-1 . m-2}{1 . 2 . 3} x^{m-3} . \Delta x^3 \ldots$$

$$\text{und } \frac{\Delta z}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m . m-1}{1 . 2} x^{m-2} . \Delta x$$

$$+ \frac{m . m-1 . m-2}{1 . 2 . 3} x^{m-3} . \Delta x^2 \ldots$$

Sieht man also nach §. 3. d. Einl. Zus. 3. wieder Δx als gegen x verschwindend an: so müssen um so mehr alle Potenzen dieser Zunahme als verschwindend betrachtet werden; folglich ist für diesen Fall

$$dz = 2x . dx$$

$$\text{und } dz = 3x^2 . dx$$

Allgemein ist $d(x^m) = mx^{m-1} dx$; daher $\frac{dz}{dx} = mx^{m-1}$.

Nullen verwandelt, folglich die Produkte aus den Zunahmen als verschwindend betrachtet, ist

$$dz = xdy + ydx;$$

folglich $\frac{dz}{dx} = x \cdot \frac{dy}{dx} + y$, und $\frac{dz}{dy} = y \cdot \frac{dx}{dy} + x$.

Eben so:

$$d(xyz) = zd(xy) + xydz = xydz + xzdy + yzdx.$$

Oder:

$$d(vxyz) = yzd(vx) + vxd(yz) = vxydz + vxzdy + vyzdx + xyzdv.$$

§. 7.

Vierter Grundsatz. Wenn in der Gleichung einer Funktion ihre veränderliche Größe zur Potenz erhoben vorkömmt: so erhält man die Differentialgleichung, wenn man die veränderliche Größe unter dem vorigen um 1 verminderten Exponenten mit dem ungeänderten Exponenten und dem Differential der Größe selbst multiplizirt.

Dieser Grundsatz erhellt aus dem vorhergehenden:

Denn man setze, in $z = xy$ sey $y = x$: so hat man nun $z = x^2$, und $\Delta z = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$;

ferner $\frac{\Delta z}{\Delta x} = 2x + \Delta x$.

Ist $z = x^2$, $x = x^3$: so ist

$$\Delta z = 3x^2 . \Delta x + 3x . \Delta x^2 + \Delta x^3 ; \text{ und}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = 3x^2 + 3x . \Delta x + \Delta x^2 .$$

Ist allgemein $z = x^m$: so ist nach dem binomischen Lehrsatze

$$\Delta z = mx^{m-1} \Delta x + \frac{m . m-1}{1 . 2} x^{m-2} . \Delta x^2$$

$$+ \frac{m . m-1 . m-2}{1 . 2 . 3} x^{m-3} . \Delta x^3 \ldots$$

$$\text{und } \frac{\Delta z}{\Delta x} = mx^{m-1} + \frac{m . m-1}{1 . 2} x^{m-2} . \Delta x$$

$$+ \frac{m . m-1 . m-2}{1 . 2 . 3} x^{m-3} . \Delta x^2 \ldots$$

Sieht man also nach §. 3. d. Einl. Zus. 3. wieder Δx als gegen x verschwindend an: so müssen um so mehr alle Potenzen dieser Zunahme als verschwindend betrachtet werden; folglich ist für diesen Fall

$$dz = 2x . dx$$

$$\text{und } dz = 3x^2 . dx$$

Allgemein ist $d(x^m) = mx^{m-1} dx$; daher $\frac{dz}{dx} = mx^{m-1}$.

Zusatz. Es sey $x = \sqrt{ay}$ zu differentiiren: so hat man

$$dx = d(ay)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}ay^{-\frac{1}{2}}.dy = \frac{\frac{1}{2}a.dy}{\sqrt{y}};$$

§. 8.

Fünfter Grundsatz. Wenn in der Gleichung einer Funktion ihre veränderlichen Größen durch Division verbunden, oder unter irgend einem Bruche vorkommen: so erhält man die Differentialgleichung, wenn man 1. den Nenner mit dem Differential des Zählers, 2. den Zähler mit dem Differential des Nenners multiplizirt; 3. dieses Produkt vom ersteren abzieht, und den Rest durch das Quadrat des Nenners dividirt.

Wenn $z = \frac{x}{y}$: so ist $z + \Delta z = \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y}$;

folglich $yz + y\Delta z + z\Delta y + \Delta y.\Delta z = x + \Delta x$;

also $\Delta z = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{(y + \Delta y)y}$.

Weil nun nach §. 3. d. Einl. Zus. 3 die Produkte aus den Zunahmen als verschwunden betrachtet werden müssen: so hat man für die vorige Gleichung der Zunahme der Funktion diese Differentialgleichung

$$dz = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Die

Die Richtigkeit dieses Grundsatzes sieht man auch aus dem vorigen ein. Denn es sey $z = \frac{x}{y}$ zu differentiiren, so hat man

$$dz = d\left[\frac{x}{y}\right] = d(xy^{-1}) = y^{-1}dx - xy^{-2}dy \text{ (§§. 6, 7.)}$$

$$= \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Hievon ist also das Differentialverhältniß

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx};$$

und $$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dx}{dy} - \frac{x^2}{y^2}.$$

Zusatz. Wenn $z = \frac{1}{y}$: so hat man $dz = -\frac{dy}{y^2}$,

und $$\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{y^2}.$$

Anmerkung.

Hat man nach diesen Grundsätzen des Differentialcalculs das Differentialverhältniß der veränderlichen Größen aufgesucht: so kann man auch umgekehrt wieder aus der bekannten Differentialgleichung die veränderlichen Größen selbst zu bestimmen suchen. Diese Verfahrungsart nennt man das Integriren; sie ist mithin das Umgekehrte

der Differentiation, wie aus Ausziehen der Wurzel das Umgekehrte der Erhebung zur Potenz.

So, wenn dx das Differential ist von x: so ist x das Integral von dx; eben so ax das Integral von adx; und wenn $mx^{m-1}dx$ das Differential ist von x^m: so ist x^m das Integral von $mx^{m-1}dx$, d. h. um ein Differential von dieser Art zu integriren, vermehrt man den Exponenten der veränderlichen Größe um 1, und dividirt dann mit dem Produkte aus dem so erhöheten Exponenten in das Differential der veränderlichen Größe. So ist, wenn $\int$ das Zeichen für die Integration ist, $\int(2xdx) = \frac{2x^2dx}{2dx} = x^2$;

Ferner ist $\int(xdy + ydx) = xy$, und $\int\left[\frac{ydx - xdy}{y^2}\right] = \frac{x}{y}$ etc.

Nur so viel fand ich für den Gebrauch, den ich am Ende dieses Anhanges von der Integralrechnung machen werde, nöthig, an diesem Orte zu bemerken.

I. Allgemeine Differenzenformeln für die trigonometrischen Funktionen.

A. Endlicher Differenzen.

§. 9.

In der Formel n. 85 wird vorausgesetzt, daß $x > y$ sey; bezeichnet man nun die endliche Zunahme von y, durch deren Hinzuthun $y = x$ wird, durch Δy, und die endliche Zunahme seines Sinus, durch deren Hinzuthuung $\sin. y = \sin. x$ wird, durch $\Delta \sin. y$: so hat man $x = y + \Delta y$, und $\sin. x = \sin. y + \Delta \sin. y$. Jene Formel geht demnach in diese über

1. $\Delta \sin. y = 2 \cos. (y + \frac{1}{2}\Delta y) . \sin. \frac{1}{2}\Delta y.$

Eben so hat man, indem man sich erinnert, daß beym Wachsen eines Bogens Cosinus Cotangente und Cosekante abnehmen, folgende Formeln:

2. $-\Delta \cos. y = 2 \sin. (y + \frac{1}{2}\Delta y) . \sin. \frac{1}{2}\Delta y$ aus n. 87.

3. $\Delta \tang. y = \frac{\sin. \Delta y}{\cos. (y + \Delta y) . \cos. y}$ aus n. 101.

4. $-\Delta \cot. y = \frac{\sin. \Delta y}{\sin. (y + \Delta y) . \sin. y}$ aus n. 102.

Weil endlich $\cos. y - \cos. x = \frac{1}{\sec. y} - \frac{1}{\sec. x}$ n. 11.

$= \frac{\sec. x - \sec. y}{\sec. x . \sec. y} = (\sec. x - \sec. y) . \cos. x . \cos. y$; so ist

$$\text{sec. } x - \text{sec. } y = \frac{\cos. y - \cos. x}{\cos. x \,.\, \cos. y}$$

$$= \frac{2 \sin. \frac{1}{2}(x+y) \,.\, \sin. \frac{1}{2}(x-y)}{\cos. x \,.\, \cos. y} \quad \text{n. 87.}$$

Daraus hat man wie vorhin,

$$5. \; \Delta \text{ sec. } y = \frac{2 \sin. (y + \frac{1}{2} \Delta y) \,.\, \sin. \frac{1}{2} \Delta y}{\cos. (y + \Delta y) \,.\, \cos. y}.$$

Endlich ist allgemein $\text{cosec.} = \frac{1}{\sin.}$; verfährt man nun, wie bey 5. und nimmt dann n. 85. zu Hülfe: so erhält man

$$6. \; -\Delta \text{ cosec. } y = \frac{2 \cos. (y + \frac{1}{2} \Delta y) \,.\, \sin. \frac{1}{2} \Delta y}{\sin. (y + \Delta y) \,.\, \sin. y} \; *)$$

Anmerkung. Die zunächst folgenden Formeln kann man unmittelbar aus den nur so dedu, zirten erhalten, wenn man $\Delta y = 0$, $\sin. \Delta y = y$ und $\cos. \Delta y = 1$ setzt. So ist nach n. 62 die erste Gleichung $\Delta \sin. y = 2 (\cos. y \,.\, \cos. \frac{1}{2} \Delta y - \sin. y \,.\, \sin. \frac{1}{2} \Delta y)$ $\sin. \frac{1}{2} \Delta y = 2 \cos. y \,.\, \cos. \frac{1}{2} \Delta y \,.\, \sin. \frac{1}{2} \Delta y - 2 \sin. \frac{1}{2} \Delta y^2 \,.\, \sin. y = \sin. \Delta y \,.\, \cos. y - \sin. y (1 - \cos. \Delta y)$ nn. 112, 39. Durch die genannte Substitution hat man demnach

$$d \sin. y = dy \,.\, \cos. y.$$

Ich

*) Vergl. Euler. Calc. differ. Part. prior.

Ich hielt es jedoch für nützlich, den Differentialformeln die gewöhnlichen Beweise in möglichster Kürze beyzufügen.

B. Unendlich kleiner Differenzen.

§. 10.

Das Differential des Sinus eines beliebigen Bogens gleicht dem Differential dieses Bogens multiplizirt mit seinem Cosinus.

Es sey $\sin. x = y$; daher $y + dy = d(\sin. x + dx)$ $= \sin. x \cos. dx + \sin. dx \cos. x$. n. 57. Aber $\cos. dx = 1$, und $\sin. dx = dx$ (§. 3 dieser Einl. vergl. mit §. 18); folglich

$$y + dy = \sin. x + dx . \cos. x$$

oder $dy = d \sin. x = dx \cos. x$.

§. 11.

Das Differential des Cosinus eines beliebigen Bogens gleicht dem negativen Differential desselben Bogens multiplizirt mit seinem Sinus.

Dieses erhellt aus dem Satze §. 10. Denn setzt man $x = 90° - y$ und differentiirt diese Gleichung: so hat man $dx = -dy$ (§. 4 des Anh.). Weil ferner $\sin. (90° - y) = \cos. y$ und $\cos. (90° - y) = \sin. y$: so geht die Gleichung $dx \cos. x = d \sin. x$ in diese über:

$$d \cos. y = -dy \sin. y.$$

Anmerkung. Das Zeichen — bedeutet die Entgegensetzung der Veränderungen. Das Wachsen eines bejahenden Cosinus beym Wachsen des Bogens ist ein Abnehmen oder eine negative Größe. Ist des Bogens Wachsen positiv: so ist wiederum auch des negativen Cosinus Wachsthum negativ.

§. 12.

Das Differential der Tangente eines beliebigen Bogens gleicht dem Differential dieses Bogens durch das Quadrat seines Cosinus dividirt *).

Es sey $\text{tang.}\, x = z = \frac{\text{sin.}\, x}{\text{cos.}\, x}$: so hat man

$$dx = \frac{\text{cos.}\, x\, d\,\text{sin.}\, x - d\,\text{cos.}\, x \,.\, \text{sin.}\, x}{\text{cos.}\, x^2} \text{ (§. 8.)}$$

$$= \frac{dx \,.\, \text{cos.}\, x^2 + dx \,.\, \text{sin.}\, x^2}{\text{cos.}\, x^2} \text{ (§§. 10., 11.)}$$

Also $d\,\text{tang.}\, x = \frac{dx}{\text{cos.}\, x^2}$ (§. 11. Zus. 2.)

Zusatz. Da $\text{cos.}\, x = \frac{1}{\text{sec.}\, x}$: ist auch $d\,\text{tang.}\, x = \text{sec.}\, x^2 \,.\, dx = (1 + \text{tang.}\, x^2)\, dx$, n. 27.

§. 13.

*) Der Strich über die Zahl des § bezeichnet den § dieses Anhanges.

§. 13.

Das Differential der Cotangente eines Bogens gleicht dem negativen Differential desselben Bogens, dividirt durch das Quadrat seines Sinus.

Man setze wieder $x = 90° - y$: so hat man 1) $dx = -dy$; 2) tang. $(90° - y) =$ cot. y, und col. $(90° - y) =$ sin. y; folglich statt der Gleichung $d \text{ tang. } x = \frac{dx}{\text{col. } x^2}$ des §. 12. diese

$$d \text{ cot. } y = \frac{-dy}{\text{sin. } y^2}$$

oder auch $d \text{ cot. } y = -\text{ cosec. } y^2 \, dy$ (§. 11′. Zus.)
$= -(1 + \text{cot. } y^2) \, dy$, n. 30.

§. 14.

Für Sekante und Cosekante, Sinus v. und Cosinus versus gelten folgende Differentialformeln:

1. $d \text{ sec. } x = d. \frac{1}{\text{col. } x} = \frac{-d \text{ col. } x}{\text{col. } x^2}$ (§. 8′ Zus.)

$= \frac{dx \text{ . sin. } x}{\text{col. } x^2}$ (§. 11′) $= \frac{dx \text{ tang. } x}{\text{col. } x}$ n. 16.

$= dx \text{ . tang. } x \text{ . sec. } x$ n. 11.

2. $d \text{ cosec. } x = d. \frac{1}{\text{sin. } x} = \frac{-d \text{ sin. } x}{\text{sin. } x^2} = \frac{-dx \text{ col. } x}{\text{sin. } x^2}$

(§. 10′)

$$= \frac{-\,dx\,.\,\cot.x}{\sin.x}$$ n. 21. $= -\,dx\cot.x$

.cosec. x. n. 29.

3. d. sin. v. $x = dx\,.\,\sin.x$ (n. 32 mit §. 11′)

4. d cos. v. $x = -\,dx\cos.x$ (n. 34 mit §. 10′).

Zusatz 1. Ist x ein beliebiger Bogen: so ist

1. $dx = \frac{d\sin.x}{\cos.x}$. 2. $dx = -\frac{d\cos.x}{\sin.x}$.

3. $dx = \frac{d\,\text{tang}.x}{\sec.x^2}$. 4. $dx = -\frac{d\cot.x}{\text{cosec}.x}$.

5. $dx = \frac{d\sec.x}{\text{tang}\,x\sec.x}$. 6. $dx = -\frac{d\,\text{cosec}.x}{\cot x.\text{cosec}x.}$

7. $dx = \frac{d\sin.v.x}{\sin.x}$. 8. $dx = -\frac{d\cos.v.x}{\cos.x}$.

Hat man demnach die Aenderung der trigonometrischen Funktion eines Bogens: so kann man auch die für den Bogen selbst hieraus erwachsende Veränderung bestimmen.

Zusatz 2. Wenn $x = \text{arc}.\sin.y$, oder $x = \text{arc}.\cos.y$ eines Kreises Bogen bezeichnet, dessen Sinus oder Cosinus y ist: so ist im ersten Falle $\sin.x = y$, und $\cos.x = \sqrt{(1-y^2)}$; im zweyten Falle ist $\cos.x = y$, und $\sin.x = \sqrt{(1-y^2)}$.

Es ist demnach $d\,\text{arc}.\sin.y = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$ (Zus. 1. n. 1.)

und

und $d\,\text{arc.cos.}\,y = \frac{-dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$ (Zuſ. 1. n. 2.).

Zuſatz 3. Drückt aber $x =$ arc. tang. y, oder $x =$ arc. cot. y den Bogen aus, deſſen Tangente oder Cotangente y iſt: ſo iſt tang. $x = y$, und ſec. $x^2 = 1 + y^2$ (n. 27); eben ſo für den zweyten Fall cot. $x = y$ und cosec. $x^2 = 1 + y^2$ (n. 30.).

Folglich $d\,\text{arc.tang.}\,y = \frac{dy}{1+y^2}$ (Zuſ. 1. n. 3.).

und $d\,\text{arc cot.}\,y = \frac{-dy}{1+y^2}$ (Zuſ. 1. n. 4.).

Zuſatz 4. Bezeichnet $x =$ arc. ſec. y, oder $x =$ arc cosec. y den Bogen, deſſen Sekante oder Coſekante y iſt: ſo iſt 1) ſec. $x = y$, und tang. x ſec. $x = y\sqrt{(y^2-1)}$. n. 17. 2) cosec. $x = y$, und cot. x, cosec. $x = y\sqrt{(y^2-1)}$ n. 22.

Folglich $d\,\text{arc.ſec.}\,y = \frac{dy}{y\sqrt{(y^2-1)}}$ (Zuſ. 1. n. 5)

und $d\,\text{arc cosec.}\,y = \frac{-dy}{y\sqrt{(y^2-1)}}$ (Zuſ. 1. n. 6) *)

Zu-

*) Es iſt wohl nur ein Druckfehler, wenn Hr. Prof. Paſquich in ſeinen vortrefflichen Opuſculis ſtatico mechanicis Vol. I. S. 47 $z\sqrt{(1-z^2)}$ ſtatt $z\sqrt{(z^2-1)}$ ſetzt.

Zusatz 5. Wenn endlich $x = \text{arc. sin. v. } y$, oder $x = \text{arc. cos. v. } y$ den Bogen bezeichnet, dessen Quersinus oder Quercosinus y ist: so ist für den ersten Fall sin. v. $x = y$ und sin. $x = \sqrt{(2y - y^2)}$ n. 8, oder für den zweyten Fall cos. v. $x = y$ und cos. $x \sqrt{(2y - y^2)}$ n. 15.

Daher ist $d \text{ arc sin. v. } y = \frac{dy}{\sqrt{(2y - y^2)}}$ (Zus. 1. n. 7.)

und $d \text{ arc. cos. v. } y = \frac{-dy}{\sqrt{(2y - y^2)}}$ (Zus. 1. n. 8).

§. 15.

Den Gebrauch dieser Formeln betreffend, ist nur noch zu merken, daß bey der Berechnung die meistentheils in Sekunden angegebene Aenderung des Bogens in Decimaltheilen des Halbmessers zu nehmen ist. §. 130. Zus.

Beyspiel. Man will finden, um wie viel der Sinus des Bogens von 28° 21′ wächst, wenn dieser um 36″ zunimmt.

Nach §. 10′ ist hier $dx = 36''$ und in Decimaltheilen des Halbmessers 1 aus der Tabelle $= 0{,}00017453$. Multiplizire ich dieses mit dem natürlichen Cosinus von 28° 21′ $= 0{,}8800633$ aus Vega's III. Tafel: so findet man

d sin.

d sin. 28° 21′ = 0,0001535 97...

Demnach ist sin. 28° 21′ 36″ =

$$\left.\begin{matrix}0{,}4748564\\0{,}0001536\end{matrix}\right\} = 0{,}4750100...$$

Hätte man sich bloß an die Proportionaltheile wegen 36″ wie sonst halten wollen: so hätte man dasselbe Resultat, nämlich mittels der zwischen sin. 28° 21′ und sin. 28° 22′ herrsche den Differenz 42, 67, folglich 42,67×36 = 1536, den letzten Ziffern des Sinus entsprechend erhalten.

Will man hiebey die Logarithmen anwenden, um die obige Multiplication zu vermeiden: so sucht man den Logar. von der Länge eines Bogens einer Sekunde in Decimaltheilen des Halbmessers. Diese Länge = λ ist = 0,0000048481 36... Nun ist der Log. von 4848136 = 6,6855748; also ist der

verlangte Log. von $\frac{4848136}{10000000000}$ = 6,6855748

— 12,00... = 0,6855748 — 6 = — 5,3144252

= 4,6855748 — 10 = log. λ.

Weil die dem Log. — 5,3144252 entsprechende Zahl zwischen $\frac{1}{206260}$ und $\frac{1}{206270}$ fällt: so

setzen auch andere Mathematiker, wie Mayer, $\frac{dx}{206264}$ für dx in Decimaltheilen des Halbmessers, und ziehen dann bey der Anwendung log. 206264 von

log.

log. dx ab. Genauer sollte es heißen $\frac{dx}{206264,8+}$.

Denn eigentlich ist der Logar. der Anzahl der Sekunden, welche ein dem Halbmesser (der Länge nach) gleicher Bogen hält, = 5,314425133176459480 47 = log. r″, und die diesem Log. entsprechende Zahl ist daher 206264, 8+; oder so groß ist die Anzahl der in einem dem Halbmesser gleichen Bogen enthaltenen Sekunden; folglich ist dieses ein Bogen von 57° 17′ 44″ 48‴ +.

Bedient man sich nun des angegebenen Log λ: so addirt man zu diesem den Logar. der Anzahl der gegebenen Sekunden, und auch den Logar. des natürlichen Cosinus des gegebenen Bogens oder Winkels. Demnach würde die Rechnung für unser voriges Beyspiel so stehen:

log. cos. 28° 21′	=	9,9445139 — 10
log. λ	=	4,6855748 — 10
log. 36	=	1,5563025
Summe	=	0,1863912 — 4.

Diesem Logar. entspricht die Zahl 0,0001536, wie oben.

Zusatz. Zieht man den Logar. 60 ab von log. r″: so erhält man den Logarithmus eines Bogens, welcher dem Halbmesser gleich und in Minuten ausgedrückt ist, oder

log. r′ = 3,536273882792815847 96.

Von

Von diesem log. r′ wieder log. 60 abgezogen, erhält man den Log. eines Bogens, welcher dem Halbmesser gleich, und in Graden ausgedrückt ist, oder

$$\log. r^{\circ} = 1{,}758122632409172221545.$$

II. Logarithmische Differentialformeln der trigonometrischen Funktionen.

§. 16.

Aufgabe. Man soll den Hyperbolischen Logarithmus der veränderlichen Größe x differentiiren.

Auflösung. Man dividire das Differential dieser Größe durch eben diese.

Beweis. Es sey log. x zu differentiiren; setzt man log. x = z: so hat man $z + dz = \log.(x + dx)$, und dz oder $d(\log. x) = \log.(x + dx) - \log. x$. Denkt man sich — log. x als aus der Division des vorhergehenden $x + dx$ entsprungen: so hat man auch $d(\log. x) = \log. \left[1 + \frac{dx}{x}\right]$.

Man setze nun $1 + \frac{dx}{x} = 1 + y$; $(1 + y)^n = 1 + z$, und $\log.(1 + y)^n = Ay + By^2 + Cy^3 \ldots$ woraus

$\log.(1 + z) = Az + Bz^2 + Cz^3 \ldots$

Aus

Aus der Gleichung $(1+y)^n = 1+z$ erhält man

$$z = ny + \frac{n.n-1}{1.\ 2.}y^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}y^3 \ldots.$$

Und die Gleichung $n \log.(1+y) = \log.(1+z)$ geht durch Substitution in diese über:

$$nAy + nBy^2 + nCy^3 \ldots = Az + Bz^2 + Cz^3 \ldots$$

In dem Gliede dieser Gleichung für z den gefundenen Werth substituirt, hat man

$$nAy + nBy^2 + nCy^3 \ldots = Any + \frac{n.n-1}{1.\ 2}Ay^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.\ 2.\ 3}Ay^3 + \text{etc.}$$
$$+ Bn^2y^2 + n^2.n-1\,By^3 + \text{etc.}$$
$$+ Cn^3y^3 + \text{etc.}$$

Da nun die einzelnen Theile des letzten Gliedes der Gleichung den entsprechenden des ersten gleich seyn müssen: so findet man in Ansehung der Coefizienten, z. B. daß, weil $nB = \frac{n.n-1}{2}A + Bn^2$ seyn muß, $B = \frac{-An+A}{2n-2} = -\frac{1}{2}A$ sey; auf gleiche Art wird man $C = \frac{1}{3}A$, und $D = -\frac{1}{4}A$ u. s. w. finden.

Demnach ist $\log.(1+y) = A(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 \ldots.)$

d. h. der Zahl $1+y$ können, weil A (der Modul irgend eines logarithmischen Systems) unbestimmt ist, unendlich viele verschiedene Logarithmen zukommen.

Da

Da nun A nach unserer Voraussetzung = 1 ist: so ist $\log.(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 \ldots$

Also ist $d(\log. x) = \log.\left[1 + \frac{dx}{x}\right] = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{x^2} + \frac{dx^3}{x^3} \ldots = \frac{dx}{x}$; indem die folgenden Theile des folgenden Gliedes gegen $\frac{dx}{x}$ verschwinden.

Zusatz 1. Es ist hieraus klar, daß überhaupt für irgend ein logarithmisches System, dessen Modul m ist,

$d(\log. x) = \frac{m\,dx}{x}$ gilt. *)

Zusatz. Es ist daher 1) $d \log. \sin. x = \frac{m\, d \sin. x}{\sin. x}$

$= \frac{m\, dx \cos. x}{\sin. x}$ (§. 10′) $= m\,dx \cdot \cot. x$. n. 21.

2) $d \log. \cos. x = \frac{m\, d \cos. x}{\cos. x} = -\frac{m\, dx \sin. x}{\cos. x}$

(§. 11′) $= m\, dx . \tang. x$. n. 16.

3)

*) Man vergl. hiermit das Schol. §. 33. Es ist leicht das dort Gesagte aus dem gegenwärtig Bewiesenen herzuleiten.

3) $d \log. \text{tang.} x = \frac{m\, d\, \text{tang.} x}{\text{tang.} x} = \frac{m\, dx}{\text{cof.} x^2\, \text{tang.} x}$ (§. 12')

$= \frac{m\, dx}{\text{fin.} x . \text{cof.} x}$, nn. 10, 16. $= \frac{2m\, dx}{\text{fin.}\ 2x}$ n. 110.

4) $d \log. \text{cot.} x = -\frac{2m\, dx}{\text{fin.}\ 2x}$ (auf ähnliche Art wie zuvor mittels §. 13')

5) $d \log. \text{fec.} x = \frac{m\, d\, \text{fec.} x}{\text{fec.} x} = m\, dx\, \text{tang.} x$ (§. 14'. 1)

6) $d \log. \text{cofec.} x = -m\, dx . \text{cot.} x$ (§. 14. 2)

7) $d \log. \text{fin. v.} x = \frac{m\, d\, \text{fin. v.} x}{\text{fin. v.} x} = \frac{m\, dx\, \text{fin.} x}{\text{fin. v.} x}$ (§. 14. 3)

$= \frac{m\, dx \text{fin.} x}{1 - \text{cof.} x}$ n. 32. $= \frac{m\, dx . \text{tang.} x}{\text{fec.} x - 1}$ nn. 16, 26.

8) $d \log. \text{cof. v.} x = -\frac{m\, dx . \text{cot.} x}{\text{cofec.} x - 1}$ (auf ähnliche Art wie zuvor).

Anmerkung. Mittels dieser Formeln wird die Berechnung der in den Messungen begangenen Fehler sehr abgekürzt und erleichtert.

III. Differentialformeln für geradlinige Dreyecke.

§. 17.

Die hier vorkommenden Formeln sind insgesammt Mittel, sich die Frage vollständig zu beantworten:

Aendern sich um ein Weniges einige Theile des geradlinigen Dreyeckes, während dessen einige andere ungeändert bleiben; welche Aenderung erleiden die mit jenen zusammenhängenden Theil des Dreyeckes?

Schon aus dieser allgemeinen Frage (vergl. mit §. 3) ist klar, daß dieses Verhalten der Aenderungen gegen einander durch den Differentialkalkul wirklich bestimmbar sey; ohne der Construction und sonach der synthetischen Beweise nöthig zu haben.

Man denke sich wieder ein geradliniges Dreyeck so bezeichnet, daß A, B, C die Winkel, und a, b, c die entsprechenden Seiten heißen, wie Fig. 20.

Aufgabe 1. Wenn eine Seite c und ihr anliegender Winkel B ungeändert bleiben, wie verhalten sich die Veränderungen der übrigen Stücke des Dreyeckes, und zwar

A. der beyden andern Seiten a, b?

Aufl. Nach §. 63 ist $2c \cdot \text{cos.}\, B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a}$

Dieses nach §. 8′ differentiirt, erhält man, weil im ersten Gliede der Gleichung lauter beständige Größen sind, und der Nenner des Differential a^2 wird:

$$0 = a\,(2\,ada - 2\,bdb) - (a^2 + c^2 - b^2)\,da$$
$$= 2a^2da - 2abdb - a^2.da - c^2da + b^2da; \text{ folgl.}$$
$$2\,abdb = (a^2 + b^2 + c^2)\,da, \text{ und}$$
$$db = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\,da}{2ab}.$$

Es ist aber aus derselben trigon. Formel cos. C

$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}; \text{ folglich ist } db = \text{cos.}\,C \cdot da;$$

$$\text{oder } \frac{db}{da} = \text{cos.}\,C; \text{ oder } da : db = 1 : \text{cos.}\,C.$$

B. Wie verhalten sich die Veränderungen des Winkels A und der anliegenden Seite b?

Auflösung. Es ist $c \cdot \text{sin.}\,B = b \cdot \text{sin.}\,C$. Wegen der beständigen Größen des ersten Gliedes hat man nach §. 6′ differentiirt, $0 = b.d\,\text{sin.}\,c + \text{sin.}\,C \cdot db = b.\text{cos.}\,C.dC + \text{sin.}\,C.db$ (§. 10′).

Da nun ein Winkel so viel abnimmt, als der andere wächst; das Abnehmen aber (als negatives Wachsen) durch b bezeichnet wird, folglich $dC = -dA$ ist; so ist

sin.

$\sin. C . db = b . \cos. C . dA$, also

$db = b . \cot. C . dA$. n. 21.

C. Wie verhalten sich die Veränderungen des Winkels A und der ihr gegenüberliegenden Seite a?

Auflösung. Unter A) ist $db = \cos. C . da$; folglich ist nach der nur so gefundenen Gleichung

$$b . \cot. C . dA = \cos. C . da$$

oder $$\frac{b . dA . \cos. C}{\sin. C} = \cos. C . da;$$

also $$da = \frac{b . dA}{\sin. C}.$$

§. 18.

Aufgabe 2. Es bleibe die Seite a mit ihrem gegenüberstehenden Winkel A ungeändert;

1) die Veränderungen eines der andern Winkel C und seiner entgegenstehenden Seite zu finden.

Auflösung. In $\frac{\sin. A}{a} = \frac{\sin. C}{c}$, wie unter A) §. 17, differentiirt; hat man

$$0 = c . d \sin. C - \sin. C . dc$$
$$= c . \cos. C . dC - \sin. C . dc$$

also $$dC = \frac{\tang. C . dc}{c}$$. n. 16.

2) Die Veränderungen der beyden andern Seiten b, c zu finden.

Auflösung. Man findet gerade so, wie vorhin,

$$3)\ dB = \frac{\text{tang.}\,B\,.\,db}{b}.$$

Weil nun in Ansehung der Veränderungen der Winkel $dC = -dB$, oder umgekehrt, ist: so hat man

$$\frac{\text{tang.}\,B\,.\,db}{b} = -\frac{\text{tang.}\,C\,.\,dc}{c},$$

woraus man $db = -\text{tang.}\,C\,.\,\text{cot.}\,B\,.\,\frac{b}{c}\,.\,dc$

$$= \frac{-\text{fin.}\,C}{\text{cof.}\,C}\,.\,\frac{\text{cof.}\,B}{\text{fin.}\,B}\,.\,\frac{\text{fin.}\,B}{\text{fin.}\,C}\,.\,dc,$$

also $db = \frac{-\text{cof.}\,B}{\text{cof.}\,C}\,.\,dc$ findet.

§. 19.

Aufgabe 3. Es bleiben die beyden Seiten b, c ungeändert; man soll finden A. die Veränderungen der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel B, C.

Auflösung. Die Gleichung $c\,.\,\text{fin.}\,B = b\,.\,\text{fin.}\,C$ differentiirt, hat man nach §. 4′ Zus. und §. 10′

c. cof.

$c . \cos. B . dB = b . \cos. C . dC$, oder

$$\frac{c . \cos. B . dB}{c . \sin. B} = \frac{b . \cos. C . dC}{b . \sin. C}$$; folgt.

$\cot. B . dB = \cot. C . dC$ oder

$\tang. C . dB = \tang. B . dC$

und $dC = \frac{\tang. C . dB}{\tang. B}$.

B. Die Veränderungen des eingeschlossenen Winkels A und eines der zwey übrigen B.

Auflösung. Weil $A = 180° - B - C$; oder $dA = - dB - dC$: so ist durch Substitution des nur so gefundenen Werthes von dC

$$dA = \frac{-(\tang. B + \tang. C)}{\tang. B} . dB$$

$$= \frac{-\sin.(C+B) . dB}{\cos. C . \cos. B} : \tang. B . n. 100.$$

Aber $B + C = 180° - A$; daher $\sin. (B+C) = \sin. (2R - A) = \sin. A$;

folglich $dA = \frac{-\sin. A . dB}{\cos. C . \sin. B}$, n. 16.

oder $dA = \frac{-a . dB}{\cos. C . b}$.

C. Die Veränderungen des eingeschlossenen Winkels A und der ihm gegenüberstehenden Seite a.

Auflösung. Nach §. 63 ist $\cos. A = \frac{b^2 + c^2}{2bc} - \frac{a^2}{2bc}$.

Weil nun der erste Theil des 2ten Gliedes der Gleichung aus beständigen Größen b, c besteht: so ist

$$d\cos. A = \frac{-4a \,.\, da \,.\, bc}{4b^2 \,.\, c^2} \quad (\S. 8')$$

oder $-dA \sin. A = -\frac{a \,.\, da}{bc}$ (§. 11')

$$\text{oder } dA = \frac{a \,.\, da}{bc \,.\, \sin. A}.$$

Aber $\frac{a}{b} = \frac{\sin. A}{\sin. B}$; folglich ist

$$dA = \frac{da}{c \,.\, \sin. B}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}. B \,.\, da}{c}. \text{ n. 29.}$$

D. Die Veränderungen eines nicht eingeschlossenen Winkels B und der veränderlichen Seite a.

Auf-

Auflösung. Aus B) und C) ist

$$\frac{da}{c.\sin.B} = \frac{-a.dB}{b.\cos.C}$$

$$\text{und } da = \frac{-c.\sin.B.\sin.A.dB}{\sin.B.\cos.C}$$

$$= \frac{-\sin.A.dB}{\cos.C}.$$

Oder für $c = \frac{a.\sin.C}{\sin.A}$ substituirt, hat man für die letzte Gleichung

$$da = -a.tang.C.dB.$$

Zusatz 1. Bleiben zwey Winkel ungeändert: so bleibt es auch der dritte; und weil bey den Aenderungen der Seiten das Dreyeck sich immer ähnlich bleibt: so verhalten sich jene immer wie die Seiten, oder es ist in diesem Falle immer $da:db = a:b$ u. s. w.

Zusatz 2. Die berechnete Veränderung ist Wachsthum, wenn sie bejaht; Verminderung, wenn sie verneint gefunden wird; wobey man sich nur der gehörigen Zeichen der trigonometrischen Funktionen erinnern muß. Auch gilt hier die Regel: Haben beyde Veränderungen in der Gleichung dieselben Zeichen: so haben beyde denselben Sinn, d. i. wachsen beyde, oder nehmen beyde ab; sind aber die Zeichen entgegengesetzt: so ist die eine Veränd-

erung Abnahme, wenn die andere Zunahme ist, und umgekehrt.

Zusatz 3. Auch beym Gebrauche dieser Formeln ist zu merken, was §. 15 gesagt worden ist.

Scholion.

Roger Cotes, dessen Aufsatz „Aestimatio errorum in mixta mathesi per variationes partium trianguli plani et sphærici“ sich in dessen von Prof. Matsko 1768 herausgegebenen Miscellen befindet, beweist alles synthetisch, und giebt für alle Veränderungen Proportionen. In solchen stellte sie auch Prof. Klügel, analytisch entwickelt, am Ende seiner mehrmals angef. Trigon. auf.

Cagnoli *) führt die vorerst in Proportionen ausgedrückte Formeln in Ansehung endlicher Veränderungen an, woraus er denn obige Differentialformeln, welche sich durch gehörige Substitutionen sehr vermehren lassen, ableitet, indem bey unendlich kleinen Veränderungen statt sin. ΔA, tang. ΔA u. s w. dA, und da für $a + \Delta a$, 1 für cos. $\frac{1}{2} \Delta A$, $\frac{1}{2} dA$ statt sin. $\frac{1}{2} \Delta A$ u. s. w. gesetzt werden kann.

So entspricht der Analogie

$$\Delta a : \sin. \Delta A = b + \Delta b : \sin. C$$

unsere Gleichung. §. 17. Fall 9.

Cag-

*) Traité de Trigonometrie. Cap. 10.

Cagnoli untersucht hierauf die Gränzen, innerhalb derer man sich auch bey merklichen Veränderungen einiger Stücke des Dreyeckes noch der Differentialformeln, die er Infinitesimalformeln nennt, bedienen könne. Die Regel ist: man kann, ohne merkliche Fehler zu begehen, dA statt sin. ΔA u. s. w. nehmen, d. i. die einschlägige Differentialformel brauchen, wenn der Bogen ΔA, nicht größer als 1° ist; weil nämlich z. B. log. 30′ und log. sin. 30′ nur um 0,000006 unterschieden sind.

Eben so ist aus den Tabellen deutlich, daß, wenn man statt tang. $\frac{1}{2}$ΔA $\frac{1}{2}$dA und 1 statt cos. $\frac{1}{2}$ΔA setzen will, im ersten Falle $\Delta A < 1° 30'$ und im zweyten nicht $> 1° 10'$ seyn dürfe.

Hieraus ziehe ich das Resultat, daß man bey dem Grade von Vollkommenheit, welchen man heutzutage unsern Meßinstrumenten gegeben hat, und bey der Kenntniß anderer Vortheile, derer man sich bey anzustellenden Messungen bedienen kann, nur äußerst selten größere Veränderungen, als die genannten, zur Frage erhalten werde; daß folglich die Differentialformeln für die bey weitem meisten Fälle mit Sicherheit auslangen werden.

Anwendung dieser Formeln.

§ 20.

Man bedient sich dieser Formeln mit großem Nutzen in der praktischen Geometrie bey Berechnung der für Winkel oder Linien daraus entsteh-

enden

enden Fehler, wenn man unrichtig gemessene Größen der Rechnung zum Grunde gelegt hat.

Als Beyspiel hierzu mag der von Kästner schon im Aufsatze „von den Fehlern beym Feldmessen" in den Schriften der schwed. Akad. d. W. auf eine andere Art aufgelöste, und in seinen astronom. Abhandl. *) wieder angeführte Fall dienen:

Den Fehler in Ansehung der 3ten Seite a zu finden, wenn man, nachdem b und c richtig gemessen worden, einen Fehler bey dem gemessenen eingeschlossenen Winkel A begangen hat.

Es sey $b = 75$; $c = 58$; $A = 108° 24'$ dessen Ergänzung zu $180° = 71° 36'$.

Hieraus findet sich $a = 108,32$. **)

Hätte man nun den Winkel um $5' = 300''$ zu groß oder zu klein genommen: so fände man die dadurch verursachte Aenderung in der Seite a aus der Formel

$$da = \frac{b.c.\sin.A.dA}{a}$$

mittels dieser Rechnung:

$$\log.dA = \begin{cases} \log.1'' = 4,6855748 - 10 \\ \log.300 = 2,4771212 \end{cases}$$

log.

*) I. Samml. S. 31.

**) Man sehe den 4ten Fall im Schema am Ende der ebenen Trigonometrie.

log. sin. A = log. sin. 71° 36′ = 9,9772095 — 10
log. b = log. 75 = 1,8750613
log. c = log. 58 = 1,7634280
arit. Erg. log. a = Erg. log. 108, 32 = 7,9652913

log. da = 0,7436861 — 2.

Diesem Logar. entspricht die Zahl 0,055422; um so viel hätte man also die Seite a zu groß genommen, wenn A nur = 108° 19′; aber zu klein, wenn A = 108° 29′ hätte gefunden werden sollen.

§ 21.

Diese Formeln langen für die Anwendung entweder gar nicht, oder sehr schwer aus, wenn man nach dem Verhältnisse der Veränderungen von mehr als zwey Stücken eines Dreyeckes fragt. Einen solchen Fall für die Geodäsie führt Mayer im zweyten Theile des genannten Buches S. 419 an.

Der Fall ist dieser: Man habe die Grundseite a = 1000 Fuß um 2′, den Winkel B = 30° 6′ um 5′, den andern an a liegenden Winkel C = 140° 8′ um 4′ zu groß gemessen: welchen Einfluß haben nun diese Fehler auf die dem Winkel B entgegenliegende Seite b?

Man sieht sogleich ein, daß keine unserer bisherigen Formeln zur Auflösung dieses Falles dienen kann, indem hier kein Stück des Dreyeckes ungeändert bleibt, und man eigentlich das Verhältniß

der

der Aenderungen zwischen 4 Stücken des Dreyeckes zu wissen verlangt. Ich versuchte es daher, aus jenen einfachen Formeln durch Substitution eine bequeme zusammengesetzte zu erhalten, nach der sich diese Aufgabe leicht lösen ließe. Allein eine solche aufzufinden, war ich nicht so glücklich. Wie man indessen durch mehrfache Operationen bloß nach den einfachen Differentialformeln für die ebenen Dreyecke diesen und ähnliche Fälle auflösen könne, werde ich weiter unten anführen.

Die sehr nützliche von Mayer angeführte Formel, welche für unsern Fall die Auflösung darbietet, deduzire ich kurz auf folgende Art:

Es ist $a:b = \sin.A : \sin.B$, oder $b.\sin.(180° - B - C) = b.\sin.(B+C) = a.\sin.B$; folglich auch $\log. b + \log. \sin.(B+C) = \log. a + \log. \sin. B$; woraus nach §. 16′ Zusatz 1. 2. durch gehörige Substitution für x

$$\frac{mdb}{b} + m(dB+dC).\cot.(B+C) = \frac{mda}{a} + mdB.\cot.B;$$

oder durch Division mit m und Metathesis

$$\frac{db}{b} + dC.\cot.(B+C)$$

$$= \frac{da}{a} + (\cot.B - \cot.(B+C)).dB.$$

=

$$= \frac{da}{a} + \left[\frac{\text{cof. B}}{\text{fin. B}} - \frac{\text{cof. (B + C)}}{\text{fin. (B + C)}}\right] . \text{dB . n. 21.}$$

$$= \frac{da}{a} + \left[\frac{\text{cof. B. fin. (B + C)} - \text{fin. B. cof. (B + C)}}{\text{fin. B . fin. (B + C)}}\right] . \text{dB.}$$

Also $\frac{db}{b} + \text{dC . cot. (B + C)}$

$$= \frac{da}{a} + \left[\frac{\text{fin C}}{\text{fin. B. fin. (B + C)}}\right] . \text{dB . n. 58.}$$

Die Quotienten $\frac{db}{b}$, $\frac{da}{a}$ drücken eigentlich aus, wie groß die Fehler db, da in Absicht ihrer zugehörigen b, a seyen. Hätte man nämlich z. B. $\frac{da}{a} = \frac{1}{100}$ gefunden; so wüßte man, daß man um ein Hunderttheilchen des Ganzen gefehlt habe.

In unserem gegebenen Falle nun, wo man aus der Formel $\frac{db}{b}$ sucht, und wo $da = 2'$; dB $= 5' = 300''$; $dC = 4' = 240''$; $a = 998$; $B = 30° 1'$; $C = 140° 4'$ ist, steht die Rechnung, wie folgt:

1) $\frac{da}{a} = \frac{2}{998} = 0{,}002.$

2) log. sin. 140° 4′
= log. sin. 39° 56′ = 9,8074646 — 10
log. dB
= log. 1″ + log. 300 (§. 15′) = 7,1626960 — 10

Summe = 18,9701606 — 22 = S

log. sin. B
= log. sin. 30° 1′ .... = 9,6991887 — 10
log. sin. (B + C)
= log. sin. 9° 55′ .... = 9,2360726 — 10

Summe = 18,9352613 — 20 = Q

Also S — Q. .... = 0,0348993 — 2

Diesem log. entspricht die Zahl 0,0108367.

3) log. dC
= log. 1″ + log. 240 = 7,0657860 — 10
log. cot. (B + C)
= log. cot. 170° 5′ = 10,7573897 — 10

Summe = 0,8231757 — 3

Diesem log. entspr. die Zahl — 0,0066542, weil cot. (B + C) negativ ist.

$$\text{Also } \frac{db}{b} = \left\{ \begin{array}{l} 0{,}002 \\ +0{,}0108367 \\ (-0{,}0066542) \end{array} \right\} = 0{,}0194909$$

= 0,02 = $\frac{1}{50}$ beynahe; d. h. also: die Fehler in der Grundseite und in den an ihr liegenden Winkeln verursachen hier, daß man die Seite b um $\frac{1}{50}$ ihrer Größe zu groß nimmt; welches schon, wenn b = 50°, eine ganze Ruthe betragen würde.

Hätte man b nach den gemessenen Theilen, wie gewöhnlich, berechnet, und dividirte den gefundenen Werth durch 50: so erhielte man den absoluten Fehler.

Zusatz 1. Hätte man z. B. B zu klein gemessen: so setzte man $\frac{db}{b} = 0{,}002 - 0{,}01084 + 0{,}00665$, u. s. w. auf ähnliche Art.

Zusatz 2. In unserm Falle, wo diese drey gefundenen Werthe addirt werden müssen, war der Fehler für $\frac{db}{b}$ am größten; diesen größten Fehler aufzusuchen ist besonders dann nothwendig, wenn man anders, als im vorgelegten Falle, in Ansehung der vorgenommenen Messungen ungewiß ist. Denn da man in jeder Messung gefehlt haben kann: so erlangt man durch die Kenntniß des größten Fehlers die größtmögliche Zuverläßigkeit in Ansehung des Gesuchten. *)

Anmerkung. Will man bloß die einfachen Differentialformeln anwenden; so hat man für zwey verschiedene Fälle folgendermaßen zu verfahren:

a)

*) Die vortrefflichen Bemerkungen, welcher Mayer von S. 425 bis 458 weiter macht, darf kein Geodät, dem es um Genauigkeit in seinen Arbeiten zu thun ist, ungelesen und unbenützt lassen.

α) Ist im geradlinigen Dreyecke nur ein einziges Stück = m unveränderlich, und sind die Aenderungen der zwey andern Stücke des Dreyeckes, oder n und p gegeben: so findet man die Veränderung eines der drey übrigen Stücke = q nach dieser Methode:

Man betrachtet m und n als beständig, und sucht dann mittels der einschlägigen Differentialformel, welche (gesuchte) Veränderung q vermöge der (bekannten) Veränderung von n leidet. Dann betrachtet man auch m und p als beständig, und ersucht wieder die in Ansehung des Stückes q von der Veränderung des Stückes n herrührende Veränderung. Die Summe beyder gefundenen Werthe ist die gesuchte Veränderung von q.

β) Wenn kein Theil des Dreyeckes unveränderlich ist, und die Veränderungen von drey Stücken m, n, p gegeben sind: so verfährt man, um die Veränderung der übrigen Stücke oder von q zu finden, nach folgender Methode:

Man betrachtet m und n als beständig, und sucht vermöge der einschlägigen Formel die von der bekannten Veränderung des p hervorgebrachte Veränderung des Stückes q. 2) Betrachtet man als beständig m und p, und sucht die durch die bekannte Veränderung von n hervorgebrachte Veränderung von q. 3) Endlich betrachtet man n und

p als

p als beständig, und sucht die durch die Veränderung von m bewirkte Veränderung von q. Die Summe dieser bewirkten Veränderungen ist die verlangte Veränderung.

Die Gültigkeit dieser Methoden leuchtet von selbst ein.

IV. Differentialformeln für die Kugeldreyecke.

§. 22.

Aufgabe 1. Im Kugeldreyecke ABC (nach der gewöhnlichen Bezeichnung, z. B. Fig. 46. der V. Tab.) bleiben ungeändert die Seite b mit dem anliegenden Winkel A, man soll das Verhältniß der Veränderungen der übrigen Stücke des Dreyeckes finden —

1) Der zwey übrigen Seiten a, c.

Auflösung. Nach §. 121. XII. ist col. A $= \frac{\text{col. a} - \text{col. b . col. c}}{\text{sin. b . sin. c}}$; oder col. A . sin. b $= \frac{\text{col. a}}{\text{sin. c}} - \text{col. b . cot. c.}$ Das rechte Glied differentiirt, hat man, indem das Linke nur beständige Größen enthält, nach §§. 8′ 4′

$$0 = \frac{\text{sin. c . d col. a} - \text{col. a d sin. c}}{\text{sin. c}^2} - \text{col. b . d cot. c.}$$

$$= \text{sin. c. d col. a} - \text{col. a d sin. c} - \text{col. b . sin. c}^2 \text{ . d cot. c.}$$

$$= -\text{sin. c , sin. a , da} - \text{col. a col. c dc} + \text{col. b . dc}$$

(§§. 11′, 10′, 13″).

Also $\sin. c . \sin. a \, da = (\cos. b - \cos. c . \cos. a) \, dc$

und $da = \frac{\cos. b - \cos. c . \cos. a}{\sin. c . \sin. a} . dc.$

Also $da = \cos. B . dc.$

2. Der übrigen Winkel B, C.

Auflösung. Man differentiire wieder, wie vorher, die Formel $\cos. b = \frac{\cos. B + \cos. A . \cos. C}{\sin. A . \sin. C}$

§. 122. XIV; so erhält man

$$-dB = \frac{\cos. A + \cos. B . \cos. C}{\sin. B . \sin. C} . dC.$$

Folglich, wenn man in jener Formel die Buchstaben b, B und a, A verwechselt,

$-dB = \cos. a . dC$*)

3. Der Seite a und des Winkels B.

Auflös. $\sin. b . \sin. A = \sin. a . \sin. B$ (§. 120. I); demnach

$$0 = \sin. a . d \sin. B + \sin. B . d \sin. a$$
$$= \sin. a . \cos B . dB + \sin. B . \cos. a . da, \text{ woraus}$$

$$-dB = \frac{\sin. B . \cos. a . da}{\sin. a . \cos. B} = \tang. B . \cot. a . da$$

oder $-dB . \tang. a = da . \tang. B.$

4.

*) Kästner hätte der nämlichen Auflösung gemäß in der I. Sammlung der astronomischen Abhandl. S. 97. auch nothwendig statt + dB setzen müssen — dB.

4. Der Seite a und des Winkels C.

Aufl. Die Werthe für — dB aus 2) und 3) gleichgestellt; ist

$dC . tang. a . cos. a = da . tang. B$; folglich

$$\frac{dC}{da} = \frac{tang. B}{sin. a}.$$

5. Der Seite c und des Winkels B.

Auflösung. Aus 3) ist $da = \frac{-dB . tang. a}{tang. B}$

$= cos. B . dc$ (aus 1),

oder $- dB . tang. a = dc . sin. B$;

$$\text{also } \frac{-dB}{dc} = \frac{sin. B}{tang. a}.$$

6. Der Seite c und des Winkels C.

Auflösung. Aus 4) ist $da = \frac{sin. a}{tang. B} . dC$

$= cos. B . dc$ (aus 1).

$$\text{Also } \frac{dC}{dc} = \frac{sin. B}{sin. a}.*)$$

§. 23.

Aufgabe 2. Wenn der Winkel A und seine gegenüberstehende Seite a ungeänd-

*) Auf diese kürzere Deduction der Formeln in 4. 5 6. statt der weitläuftigern von Kästner weist auch Klügel in seiner anal. Trigon. S. 222 hin.

ert bleiben, das Verhältniß der übrigen Stücke des sphärischen Dreyeckes zu finden —

a. Der Seite c und des gegenüberlieg-enden Winkels C.

Auflösung. Nach §. 120. I. ist $\frac{\text{sin. A}}{\text{sin. a}} = \frac{\text{sin. C}}{\text{sin. c}}$; dieß letzte Glied nach §. 10′ differentiirt, ist

$$0 = \text{sin. c . cos. C . dC} - \text{sin. C . cos. c . dc.}$$

Daher $\text{dc . sin. C : cos. c} = \text{sin. c . cos. C . dC,}$

$$\text{oder } dc = \frac{\text{sin. c}}{\text{cos. c}} \cdot \frac{\text{cos. C}}{\text{sin. C}} \cdot dC;$$

$$\text{also } dc = \frac{\text{tang. c}}{\text{tang. C}} \cdot dC.$$

b. Der Seite b und des Winkels B.

Auflösung. Wie vorher, ist auf gleiche Weise

$$db = \frac{\text{tang. b}}{\text{tang. B}} \cdot dB.$$

c. Der beyden übrigen Winkel B, C.

Auflösung. Verwechselt man in der Formel XIII. §. 122. die Buchstaben B, b (=AC), A und differentiirt: so wird aus

cos.

$$\text{cos. A} = \text{cos. a . sin. B . sin. C} - \text{cos B . cos. C}$$

$$0 = \text{cos. a (sin. B . dC . cos. C} + \text{sin. C . dB . cos. B)}$$
$$+ \text{cos. B . dC . sin. C} + \text{cos. C . dB . sin. B,}$$

und $0 =$

$$\text{dB (cos. a. sin. C. cos. B} + \text{cos. C . sin. B)} + \text{dC (cos. a . sin. B}$$
$$\text{. cos. C.} + \text{cos. B . sin. C)}$$

$$\text{sin. B . sin. C.}$$

Folglich $- \text{dB (cos. a . cot. B} + \text{cot. C)} = \text{dC (cos. a}$
$\text{. cot. C} + \text{cot. B).}$

Nun ist aber durch gehörig Verwechselung der Buchstaben in der Formel IX. §. 120.

$$\text{cot. C} = \frac{\text{sin. a . cot. c}}{\text{sin. B}} - \text{cos. a . cot. B,}$$

$$\text{cot. B} = \frac{\text{sin. a . cot. b}}{\text{sin. C}} - \text{cos. a . cot. C;}$$

folglich hat man, wenn man nach Weglassung von sin. a noch für cot. c, cot. b den Werth aus n. 21 substituirt,

$$- \text{dB} \frac{\text{cos. c}}{\text{sin. c . sin. B}} = \text{dC} \frac{\text{cos. b}}{\text{sin. b . sin. C}}.$$

Also $-$ dB . cos. c $=$ dC. cos. b (weil die Divisoren gleich sind).

Oder $\frac{-\text{dB}}{\text{dC}} = \frac{\text{cos. b}}{\text{cos. c}}$, oder, wie Käſtner diese Formel giebt, $\text{dB} = \frac{-\text{cos. b}}{\text{cos. c}} . \text{dC.}$

b. Des Winkels C und der Seite b.

Formel. $\frac{-dC}{db} = \frac{\text{tang. B . cos. c}}{\text{sin. b}}$ (aus b und c).

c. Der 2 Seiten b, c.

Auflösung. Aus b) ist dC

$= \frac{-\text{db . tang. B . cos. c}}{\text{sin. b}} = \frac{\text{dc . tang. C}}{\text{tang. c}}$ (aus a),

daher $-\text{db}\frac{\text{sin. B . sin. c}}{\text{cos. B}} = \text{dc}\frac{\text{sin. C . sin. b}}{\text{cos. C}}$; woraus wie zuvor, die Formel $\frac{-\text{db}}{\text{dc}} = \frac{\text{cos. B}}{\text{cos. C}}$.

§. 24.

Aufgabe 3. Es bleiben beständig 2 Seiten b, c; man soll das Verhältniß der Veränderungen der übrigen Stücke des sphärischen Dreyeckes finden —

α. Der Seite a und ihres gegenüberliegenden Winkels A.

Auflösung. Nach Formel XI. §. 121. ist

$\text{cos. a} = \text{cos. b . cos. c} + \text{sin. b . sin. c . cos. A}$;

folglich nach §§. 4′, 6′ 11′ differentiirt,

$-\text{da . sin. a} = -\text{dA . sin. A . sin. b . sin. c}$;

$\text{also } \text{dA} = \frac{\text{sin. a}}{\text{sin. b . sin. c . sin. A}} \text{. da.}$

Aber

Aber sin. b. sin. A = sin. B. sin. a, wie sin. B . sin. c = sin. b. sin. C; folglich ist hier die Formel

$$dA = \frac{da}{\text{sin. B . sin. c}} = \frac{da}{\text{sin. b . sin. C}},$$

$$\text{oder } \frac{dA}{da} = \frac{1}{\text{sin. B . sin. c}} = \frac{1}{\text{sin. b . sin. C}}.$$

β. Der 2 Winkel B, C.

Auflösung. $\frac{\text{sin. b}}{\text{sin. c}} = \frac{\text{sin. B}}{\text{sin. C}}$ differentiirt, ist

$$0 = \text{sin. C . dB . cos. B} - \text{sin. B . dC . cos. C.}$$

und dC. tang. B = dB. tang. C;

$$\text{also } \frac{dB}{dC} = \frac{\text{tang. B}}{\text{tang. C}}.$$

γ. Der beyden Winkel A, B.

Auflösung. Aus sin. a. sin. B = sin. b. sin. A ist durch Differentiation

— da . cos. a . sin. B — dB . cos. B . sin. a = — dA . cos. A . sin. b.

Folglich dB . cos. B . sin. a = dA . sin. b (cos. A — cos. a . sin. B . sin. C),

(indem man nämlich aus der Formel unter α) den Werth für da substituirt).

Nun geht die Formel XIII. §. 122. durch Verwechselung der Buchstaben und Metathesis in diese cos. A — cos. a . sin. B . sin. C = — cos. B . cos. C über;

also ist durch Substitution und dann durch Division mit cos. B

$$dB . \sin. a = - dA . \sin. b . \cos. C;$$ woraus die

Formel $$\frac{-dA}{dB} = \frac{\sin. a}{\sin. b . \cos. C} = \frac{\sin. A}{\sin. B . \cos. c}.$$

δ. Der beyden Winkel A, C.

Auflösung. Seiten und Winkel gehörig verwechselt, hat man, wie vorher, die

Formel $$\frac{-dA}{dC} = \frac{\sin. a}{\sin. c . \cos. B} = \frac{\sin. A}{\sin. C . \cos. B}.$$

ε. Der Seite a und des Winkels B.

Auflösung. $$-dA = \frac{-da}{\sin. b . \sin. C}$$ (aus α)

$$= \frac{dB . \sin. a}{\sin. b . \cos. C}$$ (aus γ)

folglich $$-da = \frac{dB . \sin. a . \sin. b . \sin. C}{\sin. b . \cos. C} = dB$$

$$\sin. a . tang. C$$

oder Formel $$\frac{-da}{dB} = \sin. a . tang. C.$$

ζ. Der Seite a und des Winkels C.

Auflösung. Aus β) und ε) findet man, wie vorher

die Formel $$\frac{-da}{dC} = \sin. a . tang. B.$$

§. 25.

Aufgabe 4. Es bleiben zwey Winkel B, C ungeändert, das Verhältniß der Veränderungen der übrigen Stücke des Kugeldreyeckes zu finden.

Auflösung. Man setze in den Formeln des vorigen §. für die Seiten und Winkel die Complemente der gegenüberstehenden Winkel und Seiten. Die Differentialen dieser verwechselten Seiten und Winkel werden entgegengesetzt, wie ihre Tangenten und Cosinusse.

Man erhält auf diese Weise folgende 6 den vorhergehenden entsprechende Formeln:

A. $\frac{da}{dA} = \frac{1}{\sin. b . \sin. C} = \frac{1}{\sin. c . \sin. B}$.

B. $\frac{db}{dc} = \frac{\text{tang. b}}{\text{tang. c}}$.

C. $\frac{da}{db} = \frac{\sin. A}{\sin. B . \cos. c} = \frac{\sin. a}{\sin. b . \cos. c}$.

D. $\frac{da}{dc} = \frac{\sin. A}{\sin. C . \cos. b} = \frac{\sin. a}{\sin. c . \cos. b}$.

E. $\frac{dA}{db} = \sin. A . \text{tang. c}$.

F. $\frac{dA}{dc} = \sin. A . \text{tang. b}$.

Schol.

Scholion.

Cagnoli hat diesen Gegenstand mit einer solchen Ausführlichkeit behandelt, daß man ihn leicht einer zu großen Weitläuftigkeit beschuldigen kann. Seine Abhandlung bis zu den Beyspielen reicht von S. 310 bis 353. Jede Differentialformel drückt er zugleich in Worten aus, was in der That sehr unnöthig ist. Auf eine ähnliche Art, wie bey den geradlinigen Dreyecken, führt er auch hier vorerst dreyerley Analogien an, nämlich 1. für die endlichen Zunahmen (des analogies finies), 2. für die unendlich kleinen Zunahmen (des analogies infinitesimales); wovon einige den ersten entsprechen, andere aber nicht. Cagnoli legt indessen zu viel Werth auf seine von ihm neu aufgestellten Analogien endlicher Zunahmen. Er nennt sie einzig strenge, und folglich ganz eigends so beschaffen, daß man mittels ihrer den genauen Werth einer jeden Größe, welche sie enthalten, und nicht bloß eines der Differentialen finden kann. Allein Cagnoli hat sich doch selbst genöthigt gesehen, mehrere Methoden anzugeben, nach welchen man verfahren müsse, wenn die genannten Analogien das Gesagte leisten.

Auch muß man in den bey weitem meisten Fällen, wo man ungewiß ist, in welchem Sinne man gefehlt habe, oder wo man aus der Vollkommenheit der Instrumente, und dem bey den angestellten Beobachtungen oder Messungen angewend-

eten Fleiße zuverläßig ist, daß der begangene Fehler nicht groß seyn könne, seine Zuflucht zu unsern Differentialformeln nehmen. Es ist allerdings richtig, daß in dem Falle, wo die Differentiale multiplizirt oder dividirt sind mit solchen Größen, welche sich entweder dem o oder dem ∞ nähern, die Differentialformeln äußerst großen Fehlern unterworfen sind; allein eben solche Fälle treten nicht oft ein. Ich ziehe aus diesem nur kurz hier Berührten das Resultat, daß die Analogien endlicher Zunahmen nicht als unbedeutend und unnütz von denen vorzüglich, welche sich sehr mit astronomischen Aufgaben beschäftigen, dürfen verworfen oder vernachläßigt werden; ungeachtet die gewöhnlichern Differentialformeln auch für sphärische Dreyecke in den meisten Fällen auslangen.

Anwendung dieser Formeln.

§. 26.

Den wichtigsten und meisten Gebrauch haben diese Formeln in der Astronomie, z. B. aus dem bekannten Unterschiede der geraden Aufsteigung und Abweichung zweyer Gestirne den Unterschied ihrer Länge und Breite zu finden; aus der Horizontalparallaxe eines Gestirns zu bestimmen, welchen Einfluß die Parallaxe für eine gewiße Höhe auf die Abweichung und gerade Aufsteigung desselben habe; aus der mittleren Anomalie die wahre zu finden u. d. gl.

So

So oft übrigens in der sphärischen Trigonometrie von den Differentialformeln für Kugeldreyecke Gebrauch gemacht wird: setzt man nicht, wie beym Gebrauche der Differentialformeln für gerad-

linige Dreyecke $\frac{dx}{206264,8+}$ statt dx: sondern die zwey Veränderungen, so wie sie in jeder Gleichung vorkommen, werden bloß in Sekunden genommen, indem sie hier jederzeit von einerley Beschaffenheit sind.

Auch gilt hier das, was §. 19'. Zus. 2 gesagt worden.

Tab. IV. Fig. 33. **Beyspiel** Der Seefahrer wisse seinen von B aus bis E zurückgelegten Weg $BE = a = 37° 24' 46''$; eben so das Complement der geogr. Breite des Ortes B, nämlich $AB = b = 41° 9'$; und das Complement der Breite des Punktes E, wo er sich befindet, nämlich $AE = c = 71° 30'$ (die an diesem Punkte beobachtete Polhöhe ist eben diese Breite): so kann er nun den zurückegelegten Weg auch in Ansehung der geogr. Länge, und somit vollkommen bestimmen, auf welchem Punkte der Erde er sich befinde. Denn er kann aus den bekannten Stücken den Winkel A am Pole, oder den Unterschied zwischen der bekannten Länge des Meridians AB und der gesuchten Länge des Meridians AE finden.

Nach

Nach einer der Formeln für Fall 1 §. 128. findet man diesen Winkel $A = 27° 8'$. *)

Gesetzt nun, man sey ungewiß, ob man sich nicht um 1° bey der Messung des zurückegelegten Weges BE geirrt habe, man wollte daher wissen, welchen Einfluß dieser Irrthum auf den berechneten Winkel A habe: so ist klar, daß, um dieses zu finden, weil im Dreyecke ABE die zwey Seiten AB, AE als beständig betrachtet werden, die Differentialformel α) §. 24', nämlich $dA = \frac{\sin. a}{\sin. b . \sin. c . \sin. A}$. da angewendet werden müsse.

Die Rechnung giebt folglich

log. da = log. 3600″ = 3,5563025

log. sin. a
= log. sin. 37° 24′ 46″ = 9,7835841 — 10

Summe = 13,3398866 — 10. = Q.

log. sin. b
= log. sin. 41° 9′ = 9,8182474 — 10

log. sin. c
= log. sin. 71° 30′ = 9,9769566 — 10

log. sin. A
= log. sin. 27° 8′ = 9,6592710 — 10

Summe = 0,4544750 — 1 = S.

Also Q — S = 3,8853116 = log. dA.

Diesem

*) Man vergl. mit diesem Beysp. das IIte Beysp. §. 61.

Diesem Logar. entspricht beynahe die Zahl 7680, d. i. A wächst oder nimmt um so viel Sekunden, oder 2° 8′ ab, je nachdem die entgegenstehende Seite um 1° zu groß oder zu klein genommen wurde.

Ich habe dieses Beyspiel absichtlich gewählt, weil Cagnoli dabey mittels der korrespondirenden Analogie finie zeigt, daß dA um 3′ fehlerhaft nach unserer Differentialformel gefunden worden sey. Allein, man sieht sogleich, daß die Größe dieses Fehlers nur von der Größe des willkührlich angenommenen Irrthumes herrührt. Je genauer nämlich der von B bis E vom Seefahrer durchlaufene Raum mittels guter Hilfsmittel berechnet ist: einem desto kleineren Fehler wird unsere Formel unterworfen seyn.

§. 27.

Als Beyspiel, wie man sehr nützliche trigonometrische Fragen blos mittels approximirter Ausdrücke beantworten könne, mag folgendes dienen:

Tab. V. Fig. 42. **Aufgabe.** Es sey in dem in A rechtwinkligen Kugeldreyecke die Grundlinie c, wie ihr gegenüberstehender Winkel C im Vergleiche mit der Hypotenuse a und dem andern Perpendikel b sehr klein; man soll den kleinen Unterschied zwischen diesen zwey letzten Seiten finden.

Auf-

Auflösung. Es ist 1) allgemein nach n. 58

$$\text{sin.}(a-b) = \text{sin.}\,a\,.\,\text{cos.}\,b - \text{cos.}\,a\,.\,\text{sin.}\,b;$$

2) nach §. 100. I ist $\text{cos.}\,b = \frac{\text{cos.}\,a}{\text{cos.}\,c}$.

Aber $\text{cos.}\,c = \sqrt{(1-\text{sin.}\,c^2)} = 1 - \frac{1}{2}c^2$ (§. 63. Zus.)

oder $\frac{1}{\text{cos.}\,c} = 1 + \frac{1}{2}c^2$;

$$\text{cos.}\,b = \text{cos.}\,a\,.\,(1+\tfrac{1}{2}c^2);$$

und $\text{sin.}\,b = \sqrt{\left[1-(\text{cos.}\,a + \frac{1}{2}c^2\,\text{cos.}\,a)^2\right]}$

$$= \sqrt{(\text{sin.}\,a^2 - \text{cos.}\,a^2\,c^2 - \tfrac{1}{4}\,\text{cos.}\,a^2\,c^4)};$$

woraus die Wurzel durch Näherung, wenn man das letzte Glied, worin die höchste Potenz von c vorkömmt, wegläßt, gezogen,

$$\text{sin.}\,b = \text{sin.}\,a - \frac{\text{cos.}\,a^2\,c^2}{2\,\text{sin.}\,a}$$ erhalten wird.

Diese zwey für cos. b, sin. b gefundenen Werthe in 1) substituirt, hat man

$$\text{sin.}\,(a-b) = \tfrac{1}{2}c^2\left[\text{cos.}\,a\,,\text{sin.}\,a + \frac{\text{cos.}\,a^3}{\text{sin.}\,a}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}c^2\,,\text{cos.}\,a\,.\left[\frac{\text{sin.}\,a^2 + \text{cos.}\,a^2}{\text{sin.}\,a}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}c^2\,\frac{\text{cos.}\,a}{\text{sin.}\,a}$$ (§. 11. Zus. 2.)

Also $\text{sin.}\,(a-b) = \frac{1}{2}\,\text{cot.}\,a\,.\,c^2 = \text{cot.}\,a\,.\,\frac{1}{2}\,\text{sin.}\,c^2$.

Ferner ist tang. c = sin. b . tang. C (§. 110); weil nun C und a—b sehr klein ist: so kann man auch statt der vorigen Gleichung mittels Substituti-on setzen

$$a-b = \tfrac{1}{2}(\sin. b . C)^2 . \cot. a$$

Substituirt man hier vollends den obigen Werth für $\sin. b^2$, nämlich bloß $\sin. a^2$, indem das andere Produkt als sehr klein weggelassen werden kann: so hat man

$$a-b = \tfrac{1}{2} . \frac{\sin. a^2 . \cos. a}{\sin. a} . C^2$$

$$= \sin. a . \cos. a . \tfrac{1}{2} C^2 .$$

Woraus nach n. 109 die Formel erhalten wird

$$a-b = \sin. 2a . \tfrac{1}{4} C^2 .$$

oder $\sin. (a-b) = \sin. 2a . \tfrac{1}{4} \sin. C^2$.

Zusatz 1. Wenn folglich a und c in Sekunden und zwar in Decimaltheilen des Halbmessers nach §. 15', wo $1'' = 0{,}000004848 1 \ldots = e$ gegeben, n diese Secundenanzahl für c, und N für C bezeichnet, endlich $a - b = u$ gesetzt wird: so hat man

$$u = \cot. a . \tfrac{1}{2} n^2 . e .$$

$$= \sin. 2a . \tfrac{1}{4} N^2 e$$

Zusatz 2. Weil a und b wenig unterschieden sind: so findet man auch u aus denselben Formeln, wenn man das gegebene b für a substituirt. *)

V.

*) Man sehe Kästners Ite Samml. astron. Abhandl. S. 110, vergl. mit Klügels analyt. Trig. S. 231.

V. Den Werth irgend eines Bogens α in Theilen des Halbmessers auszudrücken.

§. 28.

Nach §. 14′ Zus. 1. ist $dx = \frac{d \sin. x}{\cos. x}$

$= \frac{d \sin. x}{\sqrt{(1 - \sin. x^2)}} = d \sin. x. (1 - \sin. x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Erhebt man nun diesen letzten Faktor mittels der Binomialformel zur Potenz $-\frac{1}{2}$ *): so erhält man

$$dx = d \sin. x. (1 + \tfrac{1}{2} \sin. x^2 + \frac{1.3}{2.4} \sin. x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6.} \sin. x^6 . ...)$$

Diese Gleichung integrirt (§. 8′ Anm.) ist x das Integral von dx, und sin. x das Integral von d sin. x. 1; $\int (\frac{1}{2} \sin. x^2 . d \sin. x) = \frac{\frac{1}{2} \sin. x^3 \, d \sin. x}{3 \, d \sin. x}$

$= \frac{\sin. x^3}{2.3}$ u. s. w. für x folglich α gesetzt, hat man die Gleichung

$$(Q) \alpha = \sin. \alpha + \frac{\sin. a^3}{2.3} + \frac{3 \sin. \alpha^5}{2.4.5} + \frac{3.5 \sin. \alpha^7}{2.4.6.7} ....$$

*) S. Cap. III. meiner im J. 1798 herausgegebenen Gelegenheitsabh., Theorematis Binom. demonstrationem sistens. — Oder: Cap. XII. XIII. von Eulers vollständiger Anleitung zur niedern und höhern Algebra.

Schon aus diesen wenigen Gliedern beyder Reihen erkennt man ihre Gesetze, nach welchen man sie, so weit man will, fortführen kann; so werden $\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \sin.x^8$, und $\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} \sin.x^{10}$ die zwey folgenden Glieder jener ersten Reihe, so wie $\frac{3.5.7 \sin.\alpha^9}{2.4.6.8.9}$ und $\frac{3.5.7.9 \sin.\alpha^{11}}{2.4.6.8.10.11}$ die nächstfolgenden Glieder der 2ten Reihe seyn.

Nun ist nach §. 31. 1) $\sin. 30° = \frac{1}{2} r = \frac{1}{2}$, wenn $r = 1$; folglich ist

$$\text{arc. } 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3.2^3} + \frac{3}{2.4.5.2^5} + \frac{3.5}{2.4.6.7.2^7} \ldots$$

Verwandelt man diese in 7 Gliedern folgenden Brüche in Decimalbrüche, jeden Bruch mit 8 Decimalziffern: so findet sich arc. $30° = 0{,}52359878$ in Theilen des Halbmessers $= 1$.

Zusatz 1. Multiplizirt man den gefundenen Werth des Bogens von $30°$ mit 6: so erhält man den für $180°$, oder den Werth der halben Peripherie in Decimaltheilen des Halbmessers, und zwar diesen Werth um so genauer, je mehrere in die vorige Reihe gehörende Glieder berechnet werden.

Diesen Zweck erreicht man ferner um so bequemer und schneller, je mehr die Reihe selbst convergirt *), deren Glieder dem Calcul unterworfen

*) Sieh S. 21 meiner vorhin angeführten Abh.

en werden. In dem Falle nämlich, wo das folgende Glied der Reihe schon um sehr vieles kleiner ist, als das unmittelbar vorhergehende, braucht man um so wenigere Glieder zu berechnen, um den Werth des fraglichen Bogens, und dadurch den des Umkreises schon ziemlich genau zu bestimmen.

Ich erläutere dieses durch das Folgende:

Man nehme aus den Formeln §. 14′ Zus. 1.

$$dx = \frac{d\,\text{tang.}\,x}{\text{sec.}\,x^2} = \frac{d\,\text{tang.}\,x}{1 + \text{tang.}\,x^2} \text{ n. 27.} = d\,\text{tang.}\,x\,(1 + \text{tang.}\,x^2)^{-1}.$$

Verfährt man nun mit dieser Gleichung ganz so, wie mit der vorigen: so erhält man durch Integration die Gleichung

$$(S)\ \alpha = \text{tang.}\,\alpha - \tfrac{1}{3}\text{tang.}\,\alpha^3 + \tfrac{1}{5}\text{tang.}\,\alpha^5 - \tfrac{1}{7}\text{tang.}\,\alpha^7 \ldots.$$

$$\text{oder } \alpha = \text{tang.}\,\alpha(1 - \tfrac{1}{3}\text{tang.}\,\alpha^2 + \tfrac{1}{5}\text{tang.}\,\alpha^4 - \tfrac{1}{7}\text{tang.}\,\alpha^6 \ldots)$$

Weil $\text{tang.}\,45^\circ = 1$ (§. 17. Zus. 3.): so wird

$$\text{arc.}\,45^\circ = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} \ldots.$$

Welches mit 4 multiplizirt, das Verhältniß des halben Umkreises zum Halbmesser geben würde.

Hierbey erinnert Euler (Comm. Ac. Petrop. T. IX. p. 226) gegen Leibniz, welcher diese letzte Reihe für die Quadratur des Kreises (Act. Erud. Lipſ. Febr. 1682) zuerſt bekannt machte, daß, wenn man die Zahl für die Peripherie auf diese Art nur bis auf 100 Decimalſtellen berechnen wollte, man 10^{50} Glieder der Reihe finden müßte; welche

Rechnung allein ein ganzes Menschenleben erfordern würde. *)

Nimmt man daher $\alpha = \text{arc. } 30°$: so ist tang. $30°$ $= \frac{\text{sin. } 30°}{\text{cos. } 30°}$ n. 9. $= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$; folglich

$$\text{arc. } 30° = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\left\{1 - \frac{1}{3.3^1} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} \ldots\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\left\{1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} \ldots\right\}$$

Mittels dieser nun im Vergleiche mit der vorigen viel convergenteren Reihe erreichte man sein Ziel nothwendig früher.

Eine zur Berechnung des Umkreises noch weit vortheilhaftere Gleichung, als die eben gesetzte, hat zuerst Euler **) bekannt gemacht, welche auf diese Art gefunden wird:

Nach

---

*) Kästner rechtfertigt Leibniz durch die Behauptung: Leibniz habe diese Reihe nicht vorgeschlagen, um den Umfang wirklich daraus zu berechnen, sondern nur zu zeigen, daß sich die Quadratur des Kreises durch eine Reihe giebt, deren Gesetz so leicht zu übersehen ist (Anal. d. Unendl. S. 223.).

**) Introd. in An. Inf. L. 1. §. 142; oder nach der Uebersetzung von Michelsen 1. Buch, 8tes Cap. S. 152.

Nach n. 70 ist $\text{tang.}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tang.}\,\alpha + \text{tang.}\,\beta}{1 - \text{tang.}\,\alpha.\text{tang.}\,\beta} = 1$,

wenn $\alpha+\beta = 45°$ gesetzt wird (wie oben). Daher

$1 - \text{tang.}\,\alpha\,.\,\text{tang.}\,\beta = \text{tang.}\,\alpha + \text{tang.}\,\beta$; oder

$$\text{tang.}\,\beta = \frac{1 - \text{tang.}\,\alpha}{1 + \text{tang.}\,\alpha} = \tfrac{1}{3}, \text{ wenn } \text{tang.}\,\alpha = \tfrac{1}{2}.$$

Also durch Substitution in (S)

$$\alpha+\beta = \tfrac{1}{4}\pi = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} \ldots \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} \ldots \end{array}\right.$$

Dieselbe Formel führt auch Kästner und Lacroix*) an. Grüson setzt in der Anmerkung folgende von ihm erfundene und schon in seiner Pinakothek bekannt gemachte, wegen der convergenteren Reihen noch vorzüglichere Gleichung bey:

$$\pi = 4 \left\{\begin{array}{l} \frac{2^3}{1.10} - \frac{2^5}{3.10^3} + \frac{2^7}{5.10^5} - \frac{2^9}{7.10^7} \ldots \\ - \frac{1}{1.239} + \frac{1}{3.239^3} - \frac{1}{5.239^5} + \frac{1}{7.239^7} \ldots \end{array}\right.$$

*) In seinem vortrefflichen Werke: Lehrbegriff des Differ. u. Int. calc. Aus dem Franz. übers. von Prof. Grüson. M. s. S. 103.

Nach Klügels Behauptung *) ist diese Formel die vorige Eüler'sche, nur bequemer ausgedrückt, und wahrscheinlich eben dieselbe, nach welcher Machin den Umfang des Kreises für den Halbmesser 1 bis auf 100, und dann Lagny weiter bis auf 127 Decimalstellen wirklich berechnete. Kästner berichtet **), daß die Badleiische Bibliothek zu Oxford ein Manuscript besitze, worin sich noch 29 Decimalstellen mehr als bey Lagny befinden, und daß die gezeichnete Ziffer 8′ unrichtig 7 bey letzterem sey. Demnach wird der Umkreis durch

3,14159 26535 89793 23846
26433 83279 50288 41971 69399
37510 58209 74944 59230 78164
06286 20899 86280 34825 34211
70679 82148 08651 328′23 06647
09384 46460 95505 82231 72535
*
94081 28480 2. ***)

ausgedrückt. Das * bezeichnet Lagny's letzte Ziffer.

Zu-

*) Archiv der Mathematik 9tes Heft.

**) S. 331 des 1ten Th. der Anfangsgründe der Mathematik 5te Ausgabe.

***) H. Prof. Gensicher zu Königsberg soll vor einigen Jahren den Umkreis bis auf 200 Decimalstellen nach zwey verschiedenen äußerst bequemen Methoden berechnet haben. (S. Schulz kurzen Lehrb. S. 285.) Mir ist aber hievon weiter nichts zu Gesicht gekommen. —

Zusatz 2. Es erhellt übrigens, daß, wenn einmal nur der Werth eines Bogens in Theilen des Halbmessers berechnet ist, der Werth der übrigen leicht gefunden wird. So ist die Hälfte des Werthes für den Bogen von 30° der Werth des Bogens von 15°; das 3fache dieses Werthes = dem des Bogens von 45° u. s. w. Auf diese Art sieht man ein, wie man Tafeln habe berechnen können, von denen §. 130 Zus. 1. die Rede war.

Anmerkung. Anfänger werden wohl thun, wenn sie das hier Beygebrachte mit dem vergleichen, was mit der niedern Geometrie von den Methoden, das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise zu finden, oder von der Quadratur des Kreises gewöhnlich vorgetragen wird; um deutlich einzusehen, welche Fruchtbarkeit und Leichtigkeit die Grundsätze der höheren Mathematik in der Anwendung gewähren. Sie finden übrigens diesen Gegenstand in jedem brauchbaren Lehrbuche der höhern Mathematik unter dem Artikel: Von der Quadratur und Rektification des Kreises, z. B. in Kästner's Anfangsgr. d. Anal. d. Unendl. von S. 193—237 abgehandelt.

Man vergleiche auch hiermit Kästner's Gesch. d. Math. 1. B. S. 477. u. ff. und 3ten B. S. 50. u. ff.

VI. Aus dem in Theilen des Halbmessers ausgedrückten Bogen α, den Sinus dieses Bogens in denselben Theilen zu finden.

§. 29.

Wie man mittels einer jeden trigonometrischen Funktion den entsprechenden Bogen in Theilen des Halbmessers ausdrücken kann (§. 28): so dient uns umgekehrt der so ausgedrückte Bogen jede zugehörige trigonometrische Funktion ebenfalls in Theilen des Halbmessers zu finden. *)

Ich

*) Die folgende Verfahrungsart, die vorgelegte Aufgabe zu lösen, stützt sich auf die wiederkehrenden Reihen, wozu Eüler, der diese Materie im 13ten Cap. seiner Einl. in die Anal. d. Unendl. nach der Uebersetzung von Michelsen am deutlichsten abgehandelt hat, alle die Reihen rechnet, die durch die Entwickelung einer jeden gebrochenen Funktion durch eine wirkliche Division entstehen. Die für die Mathematik so wichtige Methode mittels wiederkehrender Reihen brachte, meines Wissens, zuerst Moivre in den philos. Transakt. Vol. XX. „A Method of Extracting the Root of an infinite Equation, by A. de Moivre“ zur Sprache. Zu kurz handelt hiervon Kästner im 690sten § seiner Anfangsgr. der Anal. endl. Größen v. S. 381—82. Die jenigen, welche mit der sehr fruchtbaren combinatorischen Analysis des H. Professors Hindenburg bekannt sind, werden folgende zwey Abhandlungen über diesen Gegenstand nicht ohne befriedigtes Interesse

Ich beschränke mich hier bloß wieder auf den Sinus.

Es sey die allgemeine Gleichung

(T) $m = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + ey^5 \ldots$

Die Gleichung für die unbekannte y in Potenzen der bekannten Größe m sey.

(W) $y = Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4 + Em^5 \ldots$

Diese Gleichung W erhebe man nach und nach zur immer höheren Potenz, und ordne die Glieder nach den Potenzen von m, deren jede man nur einmal in der ersten Reihe schreibt: so erhält man

$y = Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4 + Em^5 \ldots$

$y^2 = \ldots A^2 + 2AB + 2AC + 2AD \ldots$

$+ B^2 + 2BC \ldots$

$y^3 = \ldots\ldots A^3 + 3A^2B + 3A^2C \ldots$

$+ 3AB^2 \ldots$

$y^4 = \ldots\ldots\ldots A^4 + 4A^3B \ldots$

$y^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A^5 \ldots$

$\ldots\ldots$

Diese

---

esse aus der Hand legen: „De serierum reversione formulis analytico-combinatoriis exhibita specimen, quod etc. proponit Eschenbach, Lipsi. ex offic. Breitk. 1789. Und: Formulæ de serierum reversione demonstratio universalis etc., quam proponit Rothe, Lipsi, litter. Sommer. 1793.

Diese Werthe substituire man nun in der Gleichung T; so hat man

$$m = \begin{cases} ay = aAm + aBm^2 + aCm^3 + aDm^4 + aEm^5 \ldots \\ +by^2 = \ldots bA^2 + 2ABb + 2ACb + 2ADb \ldots \\ \qquad\qquad + B^2b + 2BCb \ldots \\ +cy^3 = \ldots\ldots\ldots cA^3 + 3A^2Bc + 3A^2Cc \\ \qquad\qquad + 3AB^2c \ldots \\ +dy^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots dA^4 + 4A^3Bd \ldots \\ +ey^5 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots eA^5 \ldots \\ \ldots \end{cases}$$

Folglich ist

$$o = m(aA - 1) + m^2(aB + bA^2) + m^3(aC + 2ABb + eA^3) \ldots\ldots$$

Der Werth also, der in der Gleichung W unbestimmt angenommenen Größen muß so beschaffen seyn, daß jeder Terminus des rechten Gliedes der Gleichung durch ihre Substitution o wird. Man setze also $m(aA - 1) = maA - m = o$: so ist

$m = maA$, und $A = \frac{1}{a}$; eben so findet man aus

$$m^2(aB + bA^2) = o, \quad B = -\frac{b}{a^3} \text{ u. s. w.}$$

Diese so gefundenen Werthe in der Gleichung W substituirt: hat man

$$y = \frac{1}{a}m - \frac{b}{a^3}m^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}m^3$$

$$+ \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{7}m^4$$

+

$$+\frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9} m^5 \ldots\ldots$$

Dieses vorausgesetzt, sind wir nun im Stande, die Gleichung Q (§. 28') umzukehren, um so den Werth des Sin. α in Potenzen des Bogens α ausgedrückt (was unsere Aufgabe ist) zu erhalten.

Vergleicht man nämlich die allgemeine Gleichung T mit Q: so findet man 1), daß alle Coeffizienten der Potenzen y mit geraden Exponenten o seyn müssen, weil diese Potenzen von sin. α in Q fehlen; also $b = o$, $d = o$....

2) daß $a = 1$; $c = \frac{1}{2.3}$; $e = \frac{3}{2.4.5}$ ... ist.

Hieraus bestimmen sich die Werthe der unbestimmt angenommenen Größen A, B, C... nun noch näher; nämlich $A = \frac{1}{a} = 1$; $B = -\frac{b}{a^2} = o$;

$$C = \frac{2bc - ac}{a^5} = -\frac{c}{a^4} = -\frac{1}{2.3};$$

$$D = \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7} = o;$$

$$E = \frac{14b^4 - 21ab^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}$$

$$= \frac{3c^2 - ae}{a^7} = \frac{1}{2.3.4.5} \ldots\ldots$$

Diese

Diese Werthe endlich in W substituirt, hat man, wenn $m = \text{arc.}\alpha$, $y = \text{sin.}\alpha$, die gesuchte Gleichung

$$(Z)\ \text{sin.}\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2.3} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{2.3.4.5.6.7} \ldots$$

Zusatz 1. Kästner, welcher (Anal. d. Unendl. S. 205) wegen der Schwierigkeit, das Gesetz für die unbestimmten Coeffizienten A, B, C... mit Zuverläßigkeit aufzufinden, mit Hülfe des Differential- und Integralcalculs auf einem andern Wege zum Ziele kömmt, stellt am Ende die Formel auf:

$$s = a - \frac{A.a^2}{3.2} - \frac{B.a^2}{4.5} - \frac{Ca^2}{6.7} - \frac{Da^2}{9.8} \ldots$$

wo nämlich a den Bogen und $\int$ den sin. a bedeutet.

Eben diese Gleichung findet man, wenn man unsere letzte Gleichung mit dieser

$$\text{sin.}\alpha = A - B + C - D + E \ldots$$

vergleicht. Denn dadurch findet man $A = \alpha$; $B = \alpha^2 \frac{1}{6} A$; $C = \alpha^2 \frac{1}{20} B$; $D = \alpha^2 \frac{1}{42} C$; $E = \alpha^2 \frac{1}{72} D \ldots$; oder wenn man die ganzen Glieder nur A, B u. s. w. nennt; so ist $A = \alpha$; $B = -\alpha^2 \frac{1}{6} A$ u. s. w. *)

Daß

*) Viel weitläuftiger und schwerer ist die Methode, welche Eüler l. 1. §. 134 Introd. in Anal. Inf. oder nach der Uebersetzung im 8ten Cap. S. 141. angiebt.

Daß durch diese Umänderung die wirkliche Berechnung des Sin. α äußerst erleichtert werde, erhellt von selbst. Am lichtvollsten hat Cagnoli im angef. B. S. 52 dieselbe für Sin. 30° wirklich angestellt.

Zusatz 2. Setzt man in einer der vorigen Gleichungen sin. n für sin. α: so hat man die Reihe für den Sinus des nfachen Bogens. — Man sieht also auch ein, wie man Tafeln der trigonometrischen Funktionen für den Halbmesser 1 berechnen könne. (Man vergl. §. 33. Schol. und §. 161).

Scholion. Ich setze noch die von allen bisher bekannten Methoden, Sinustafeln zu berechnen, abweichende, aber vortreffliche Methode hieher, derer sich die Herrn Verf. der oben im Bücherv. angeführten trigonometr. Tafeln, Hobert und Ideler, bedienten.

Bey Verfertigung dieser Tafeln bedienten sich die Herrn Verfasser also folgender Methode. Zwischen mehreren genau (bis auf 30 Decimalstellen) berechneten Stellen (oder Gränzlinien) interpolirten sie die übrigen. Dieses Verfahren darf nicht mit dem gewöhnlichen Einschalten verwechselt werden. Wenn man nämlich mehrere in gleichen, nicht allzugroßen, Zwischenräumen fortschreitende trigonometrische Linien von einander abzieht; so kömmt man, wie natürlich, zuletzt auf beständige Differenzen, und die übrigen Differenzen werden, wie die Linien selbst, wenigstens gleiche Anfangsziffern haben. Man kann nun, indem man von der letzten Differenz ausgeht, alle diese Differenzen Stufenweise durch bloße Addition und Subtraktion verbesseren, und so zuletzt die Größen selbst mit wenig mehr Mühe und mit der größten Schärfe eben

so gut bestimmen, als wenn die Glieder in arithmetischer Ordnung fortschreiten. Die Gränzlinien berechneten sie mittels der trigonometr. Analogien oder Gleichungen für die Sin. und Cos. der doppelten Winkel, und die Eüler'sche Formel, (introd. Anal. infinit. T. I. p. 99, oder S. 139—147 der Uebers.) diente ihnen nur, um den Sin. und Cos. von 0,1000 Q zu berechnen, welche Rechnung zugleich die von 0,0100 Q und 0,0001 Q finden ließ. Diese sind die Basis ihres ganzen Tafelsystems. Die Combination derselben gab ihrer 50 auf 30 Decimalstellen berechnete Sinusse, welche als das Skelet der ganzen Rechnung anzusehen sind. Durch die allgemeine Formel sin. nA = sin. (n—2) A + 2 sin. A . cos. (n—1) A und cos. nA = cos. (n—2) A — 2 sin. A sin. (n—1) A (welche man aus n. 85 u. n. 87 S. 85 dieses Lehrb. erhält, wenn man statt φ setzt nA, und (n—2) A statt ψ) fanden sich durch eine einfache Multiplication mit dem beständigen Faktor 2 sin. A die in kleineren Zwischenräumen aufeinander folgenden Stellen, welche zur Bestimmung der Differenzen dienten. Die Gränztangenten und Cotang. wurden durch Division aus Sin. und Cos. (nn. 16, 21. S. 70 u. 71) gesucht, und für die übrigen die nämliche Interpolationsmethode angewandt. Die Cotangenten in den ersten Hundertheilen wurden durch die Formel cot. A = 2 cot. 2A + tang. A (n. 132. S. 92) aus den Cotang. des doppelten Bogens gefunden. *)

*) Vergl. H. v. Zach's allgem. geogr. Ephemer. Aug. 1799. S. 130—131.

Ende.

fig. 1. à 13.

Schoen's Trigonom.

Tab. I.

fig. 1.

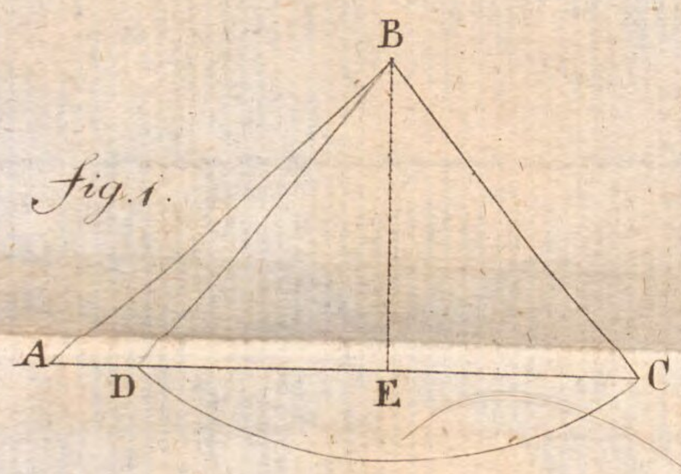


fig. 2.

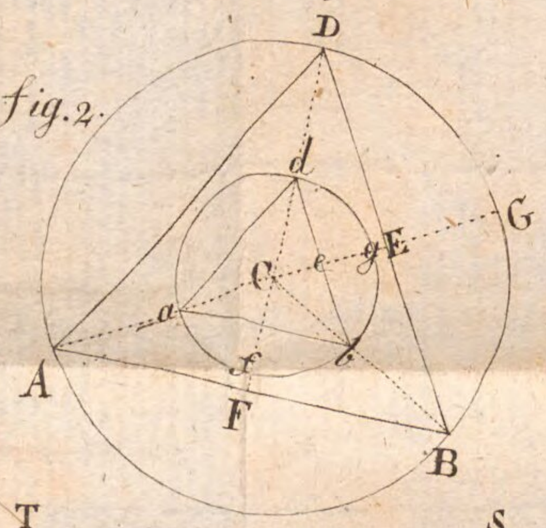


fig. 3

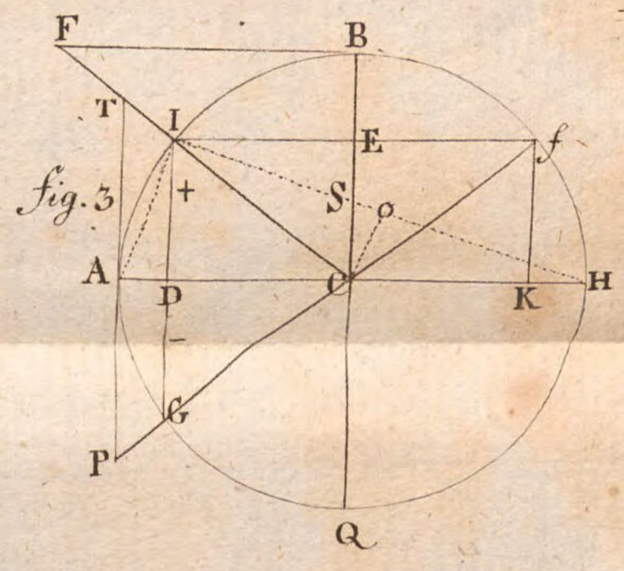


fig. 4.

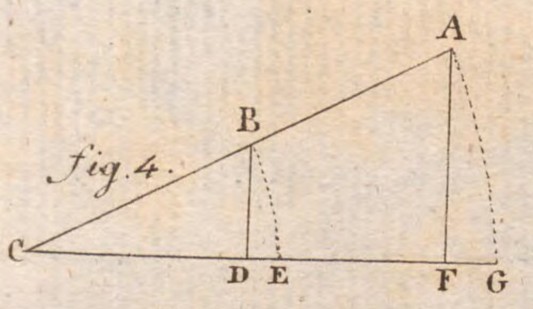


fig. 5.

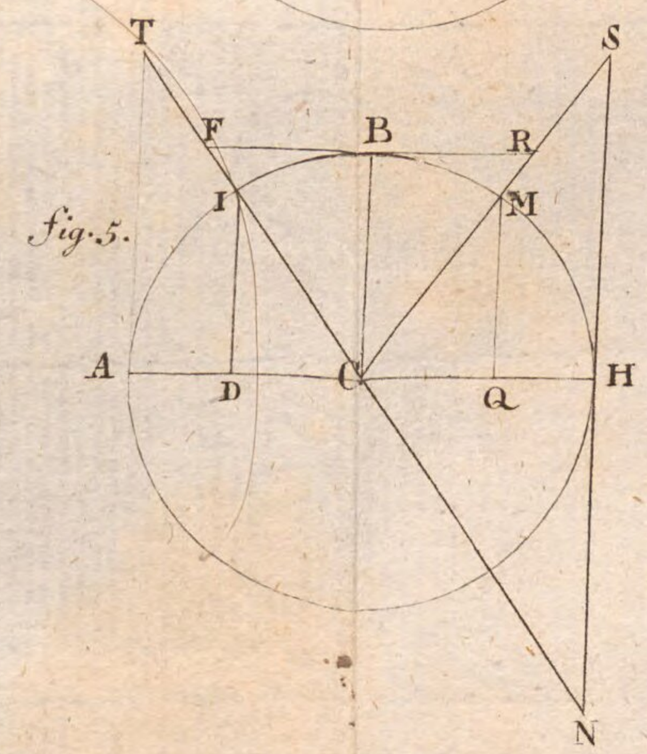


fig. 6.

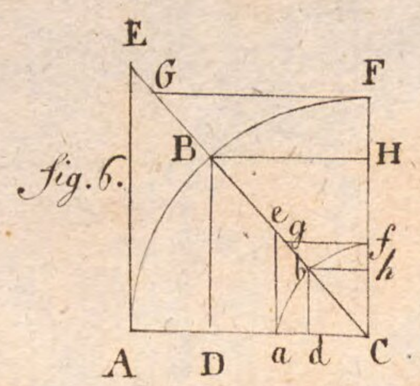


fig. 7.

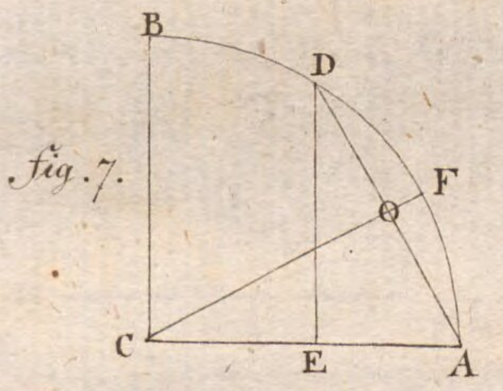


fig. 8.

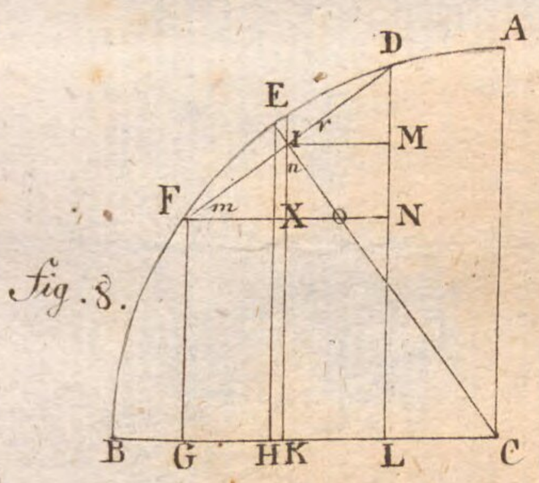


fig. 9.

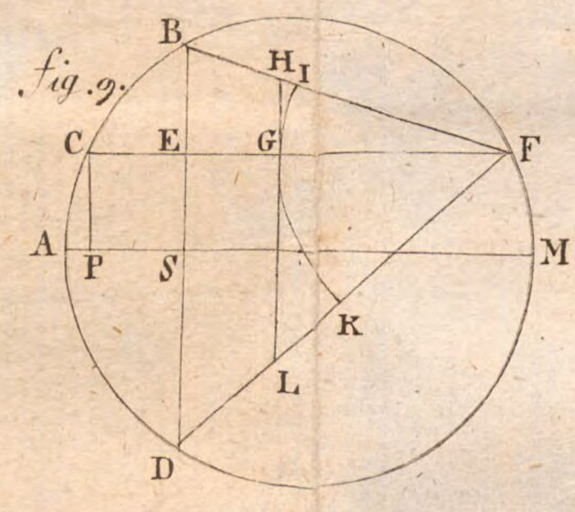


fig. 10.

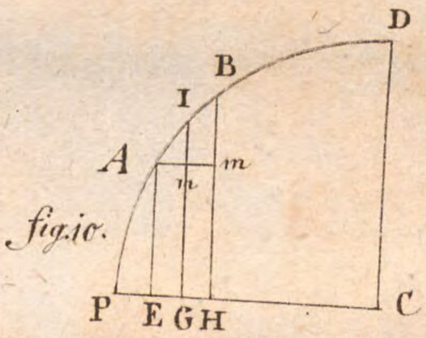


fig. 11.

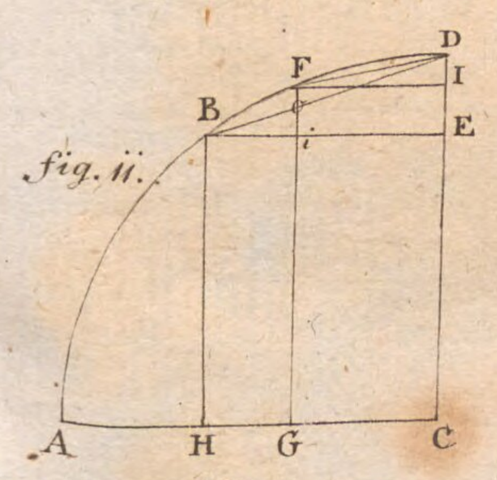


fig. 12.

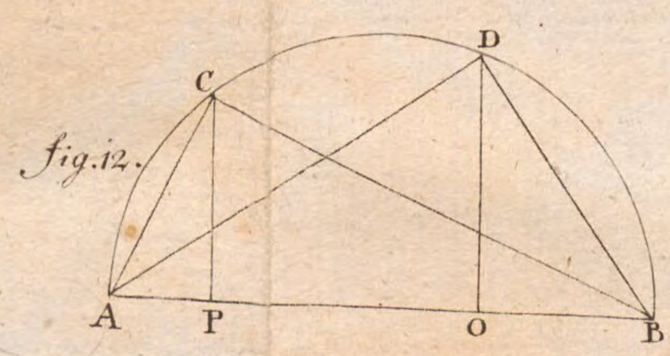
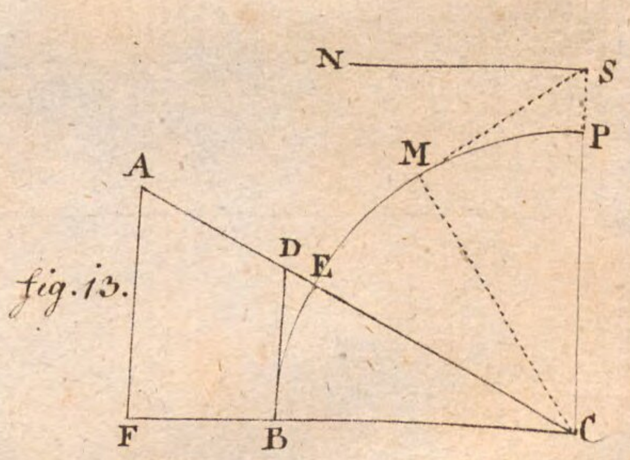


fig. 13.



Stumpf. sc.

Fig. 14. à 21.

Fig. 14.

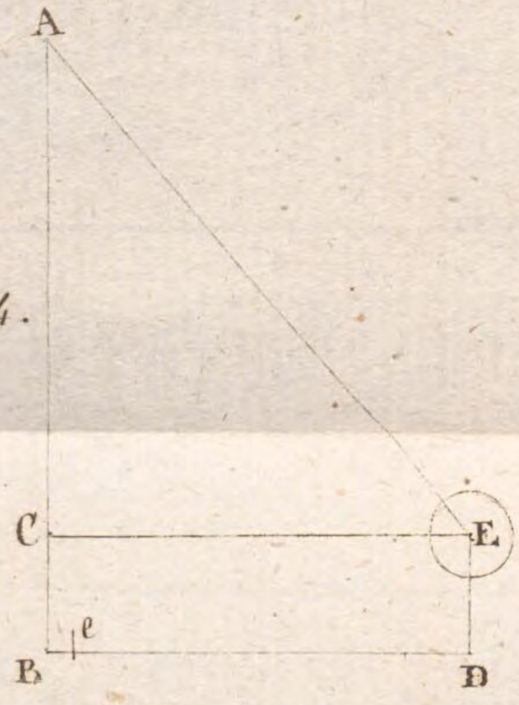


Fig. 15.

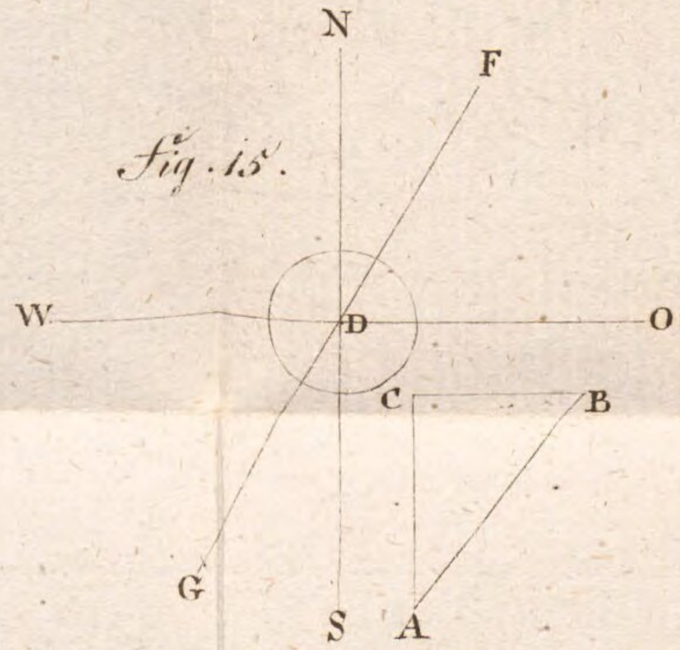


Fig. 16.

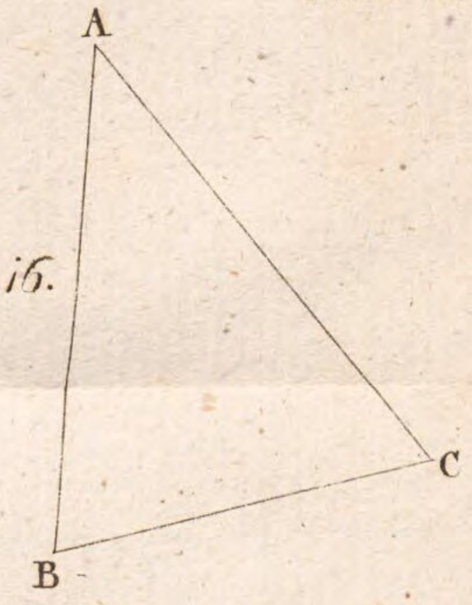


Fig. 17.

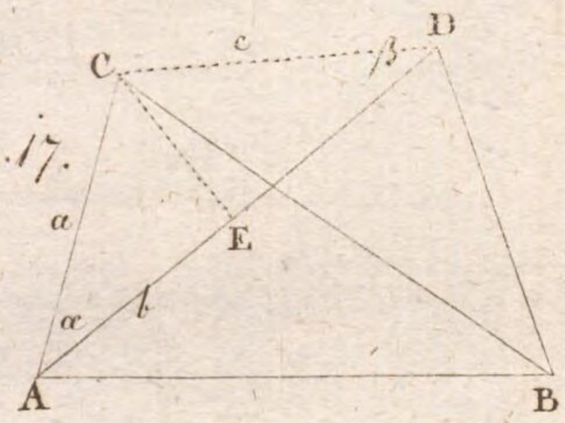


Fig. 18.

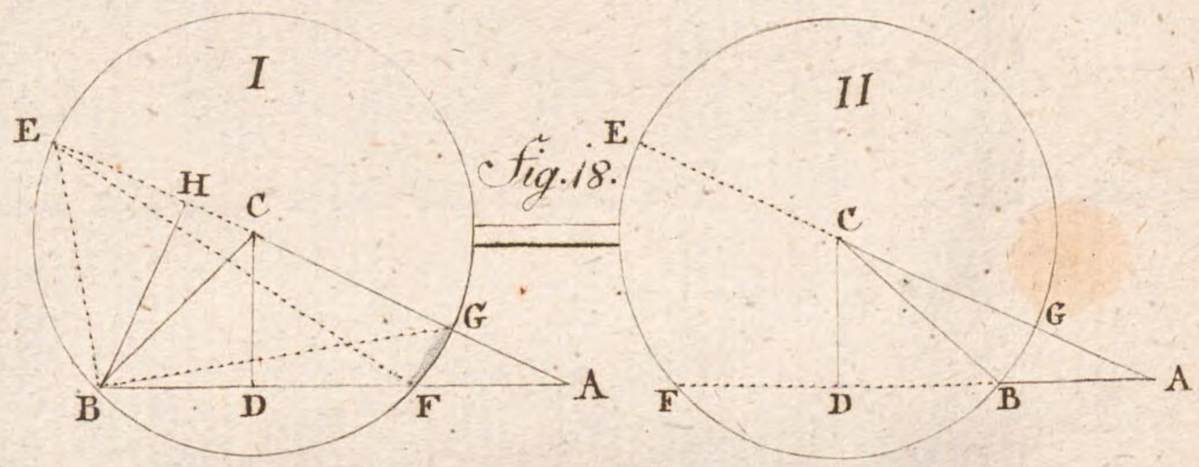


Fig. 19.

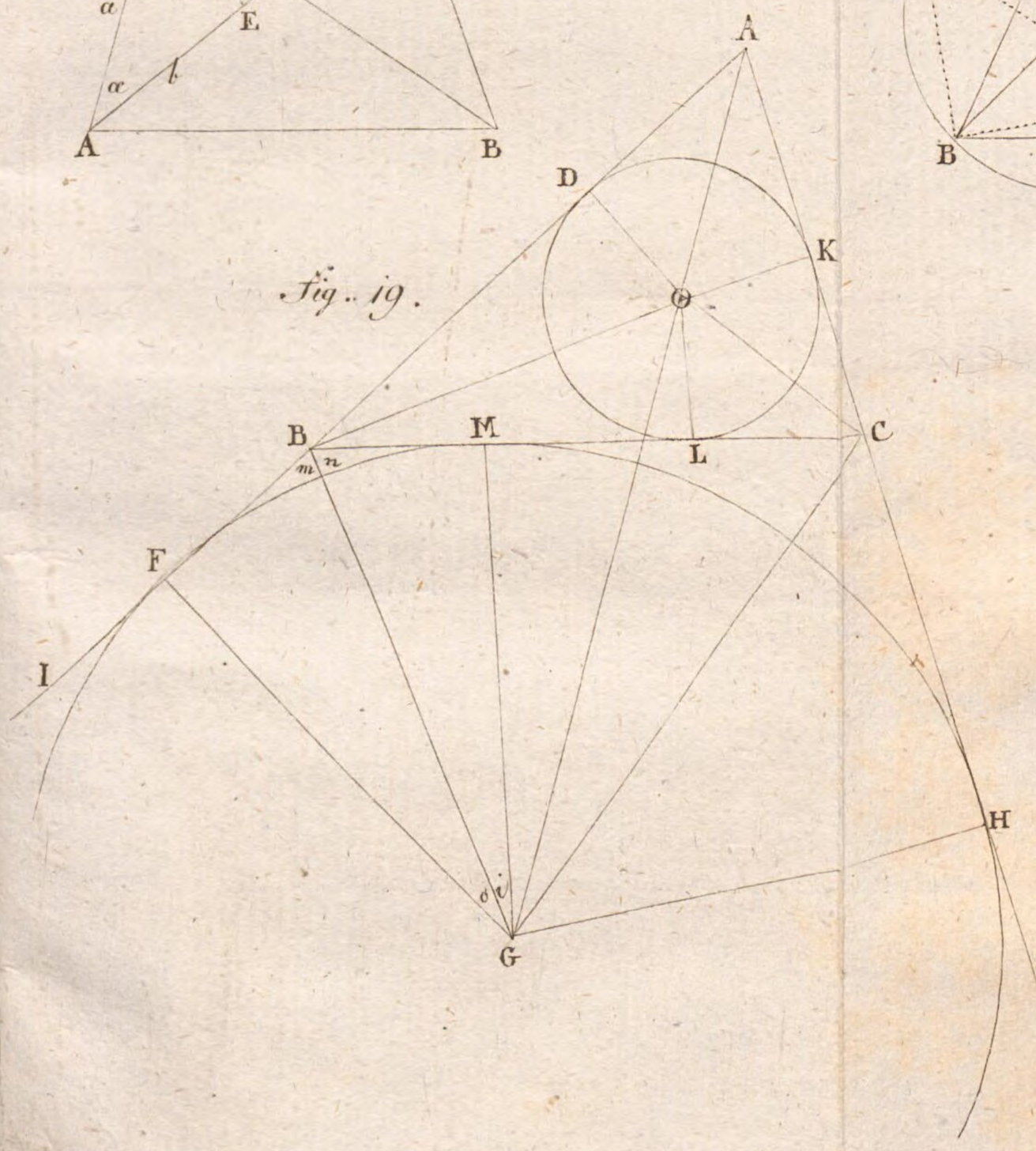


Fig. 20.

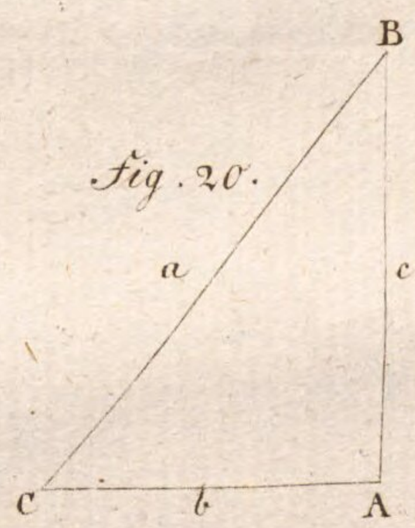


Fig. 21.

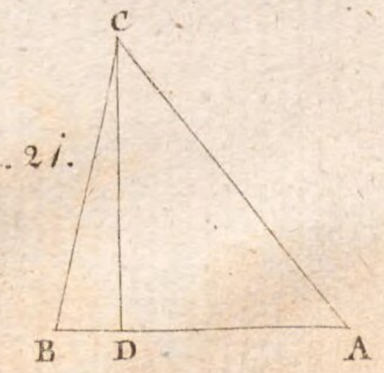


Fig. 22.

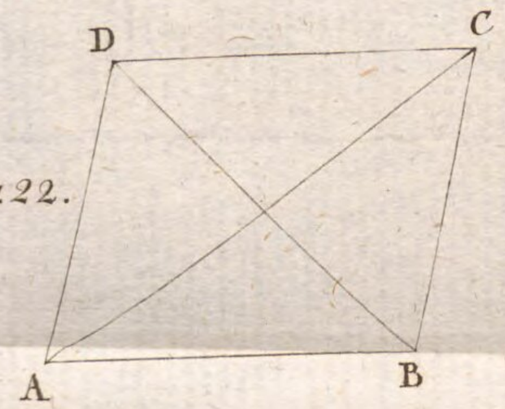


Fig. 23.

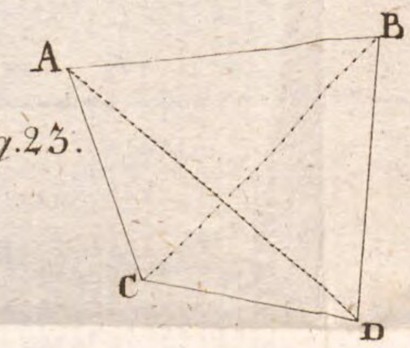


Fig. 24.

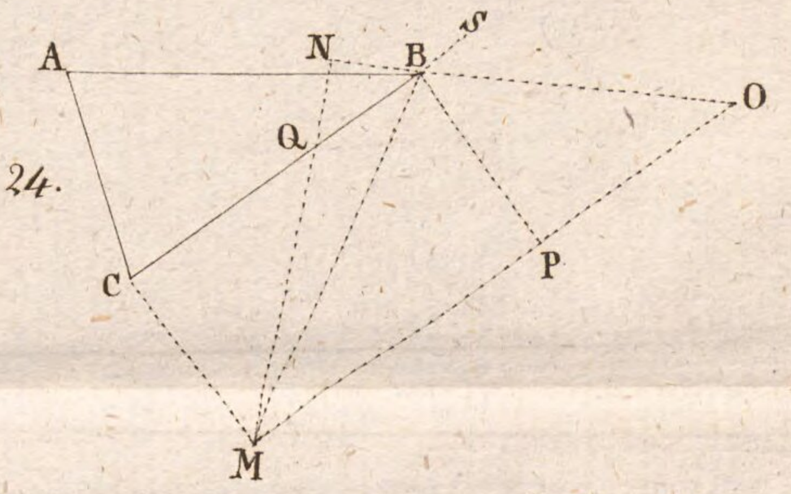


Fig. 25.

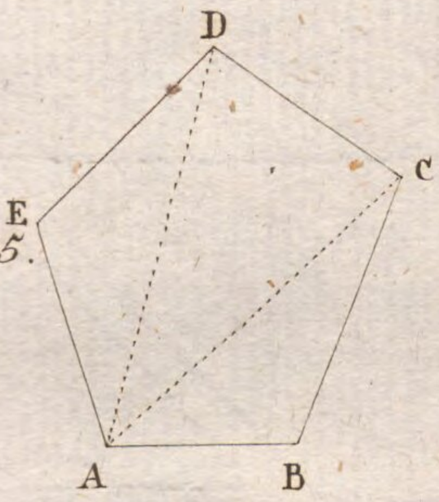


Fig. 26.

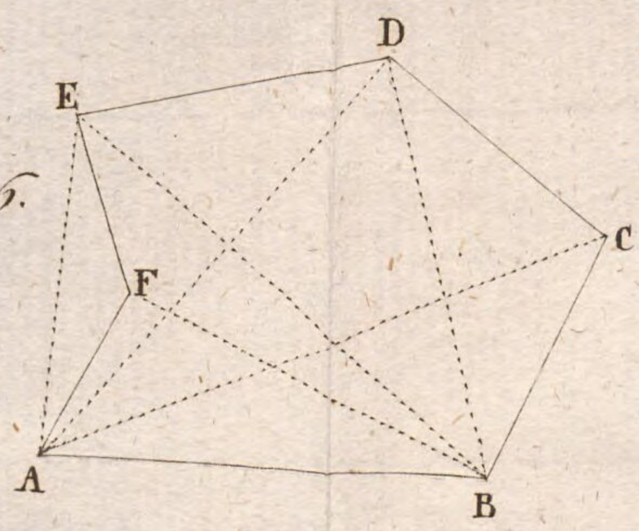


Fig. 27.

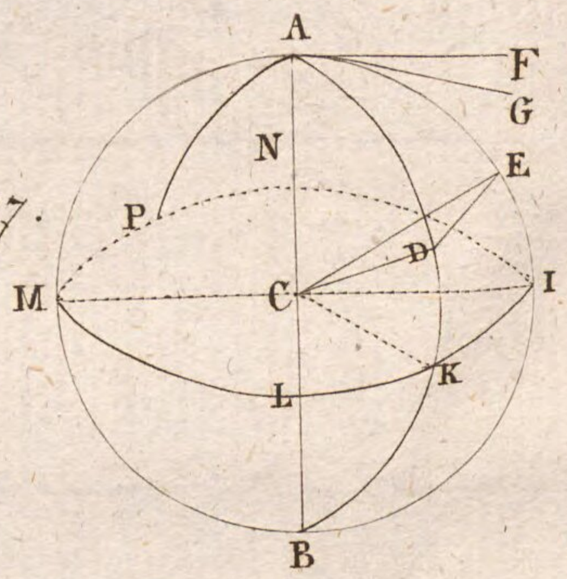


Fig. 28.

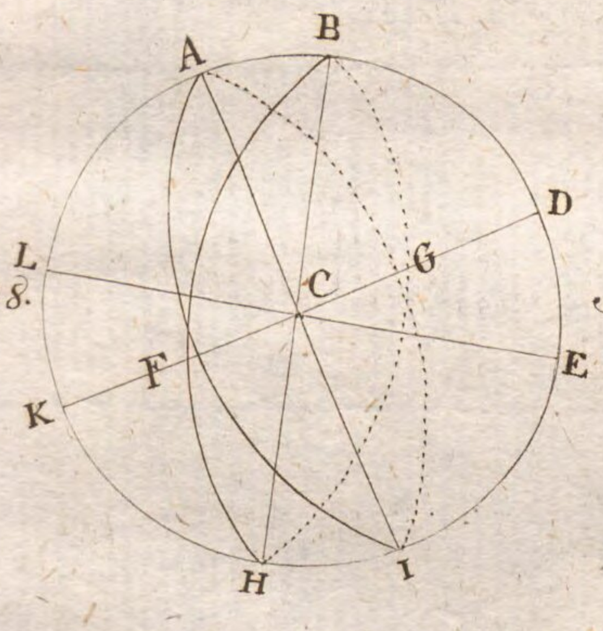


Fig. 29.

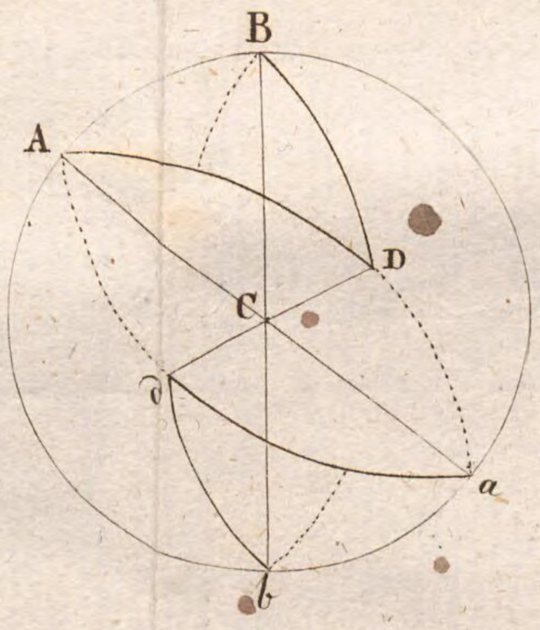
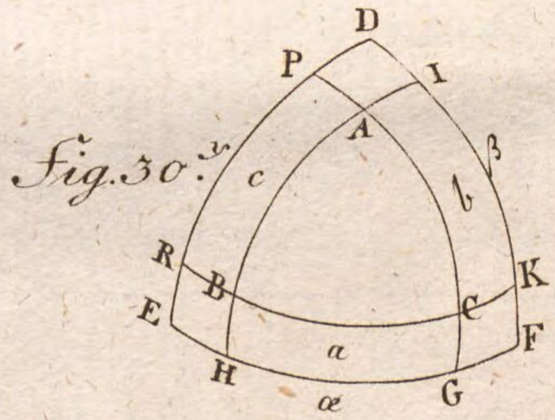


Fig. 30.



Tab. IV.

Fig. 31. à 39.

Fig. 31.

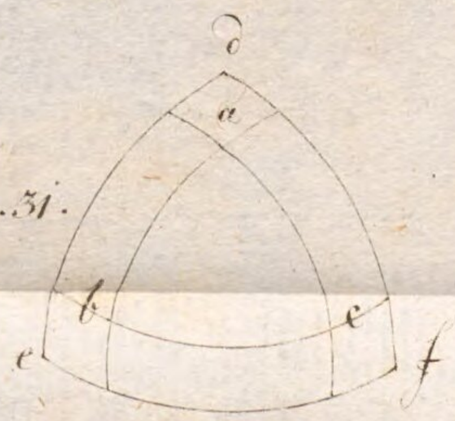


Fig. 32.

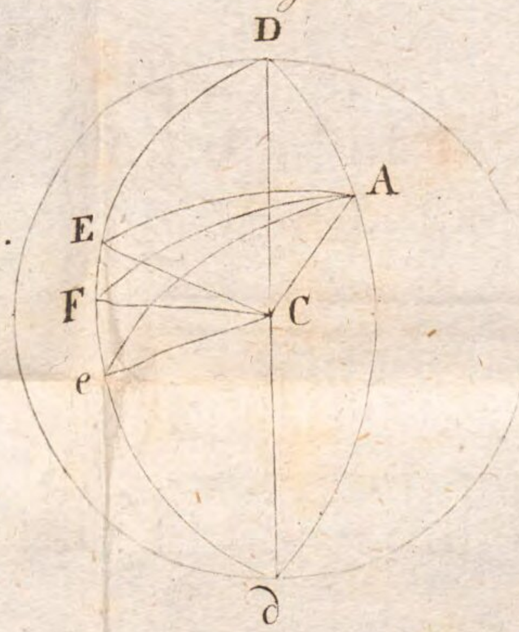


Fig. 33.

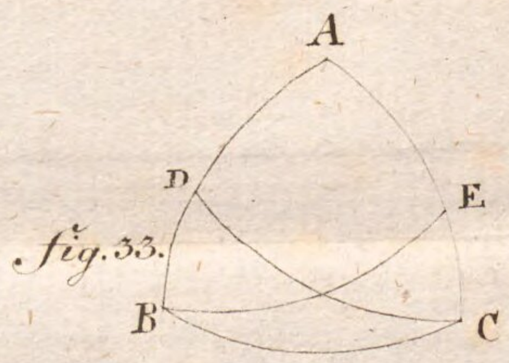


Fig. 34.

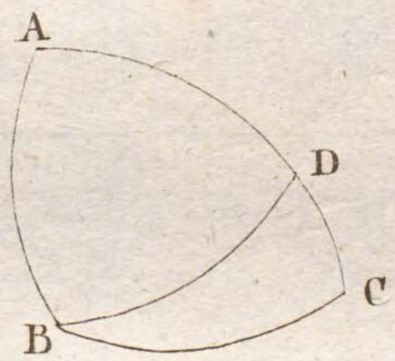


Fig. 35.

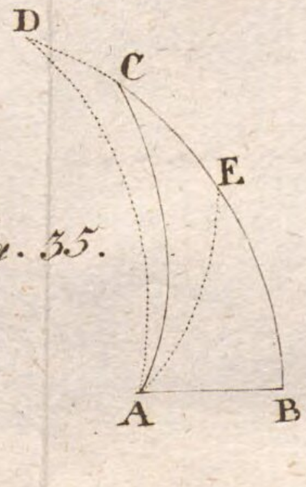


Fig. 36.

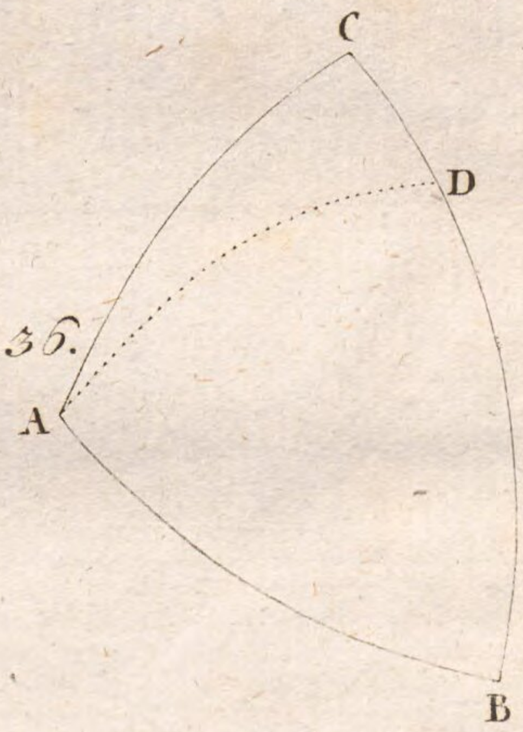


Fig. 37.

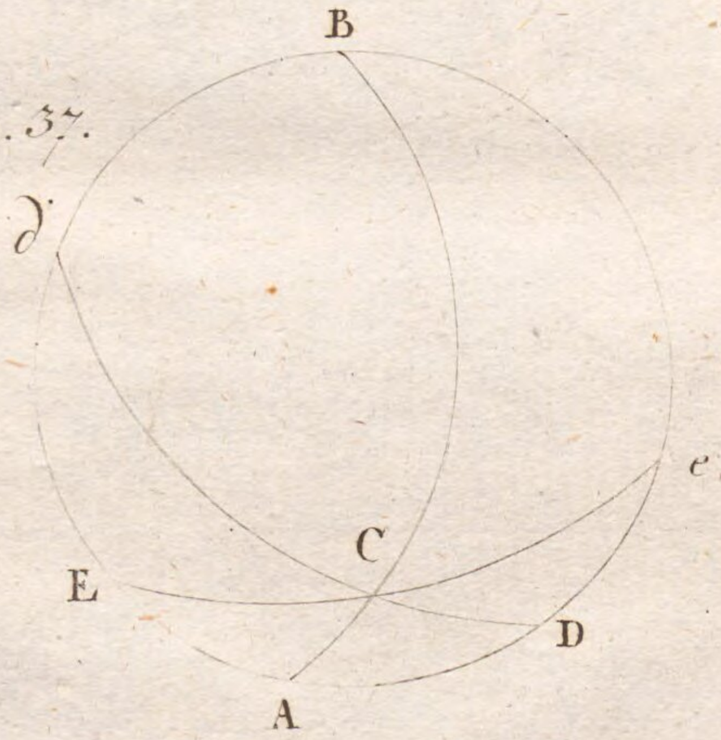


Fig. 38.

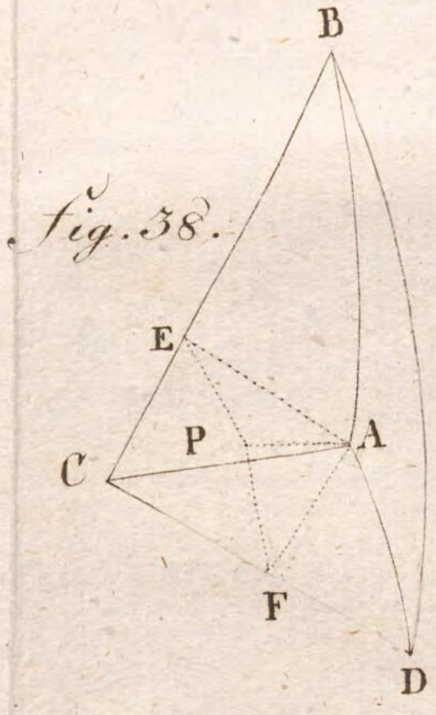


Fig. 39.

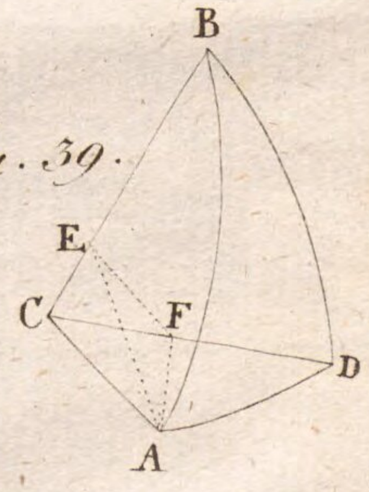


Fig. 40. à 48.

Fig. 40.

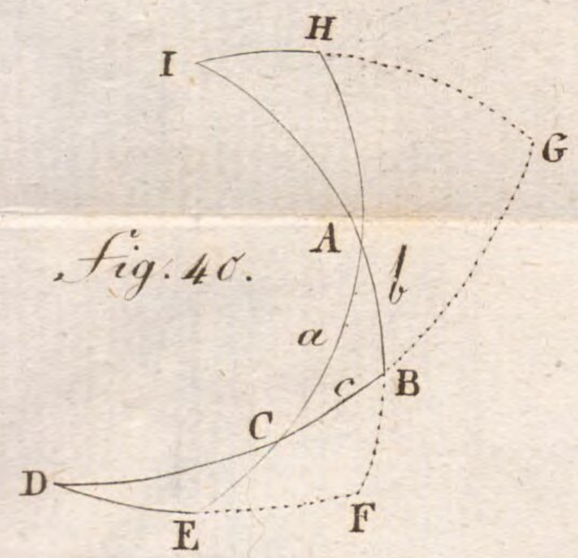


Fig. 41.

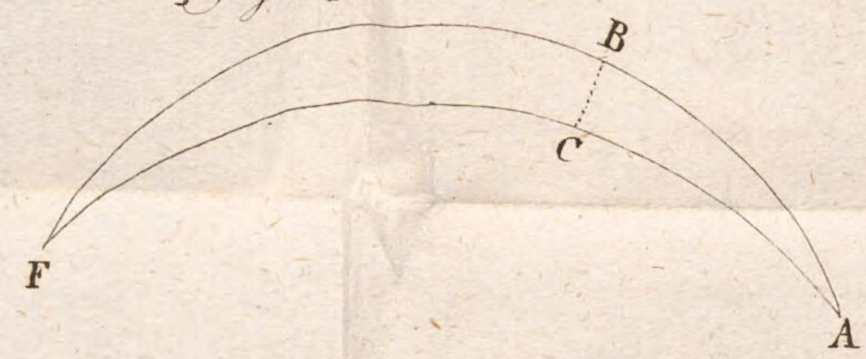


Fig. 42.

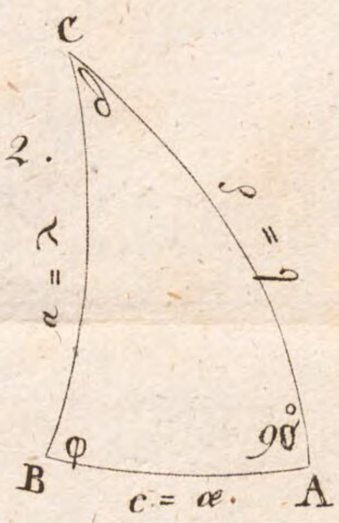


Fig. 43.

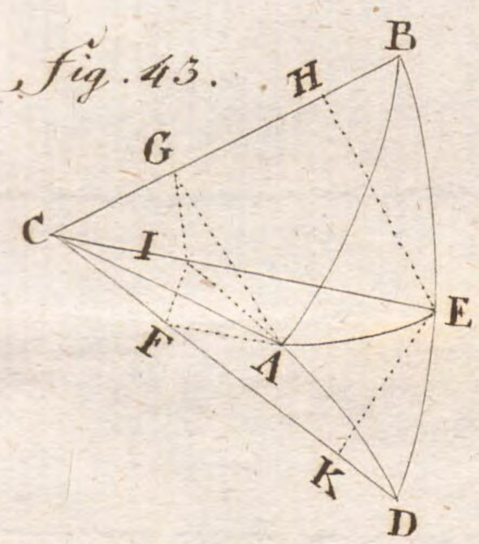


Fig. 44.

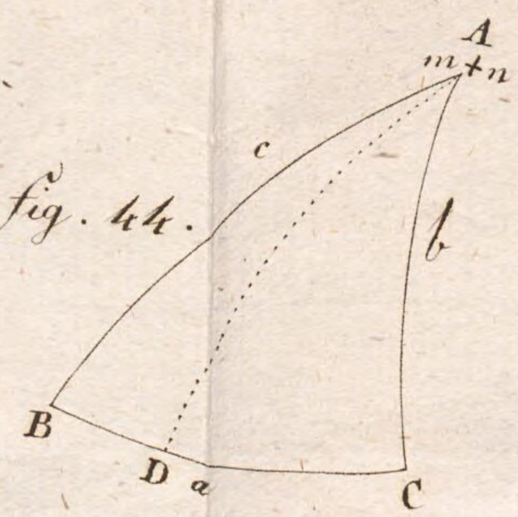


Fig. 45.

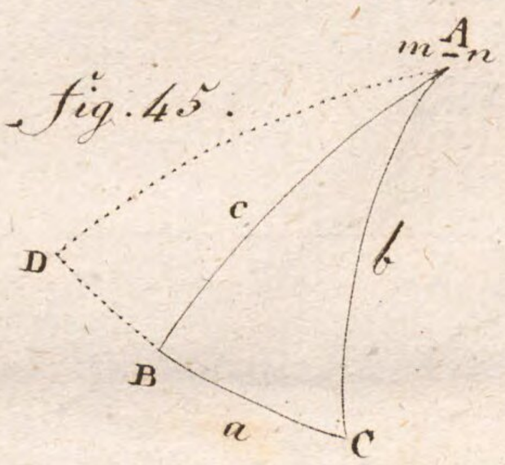


Fig. 46.

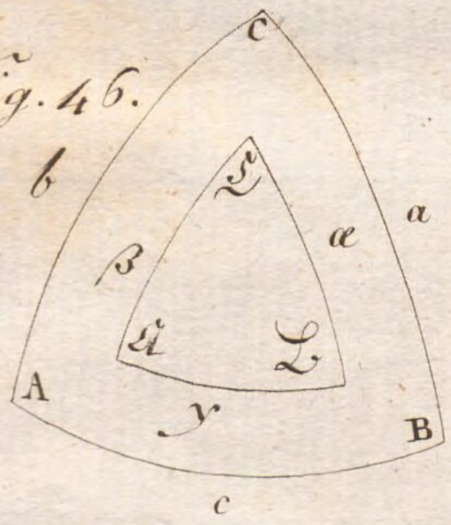


Fig. 47.

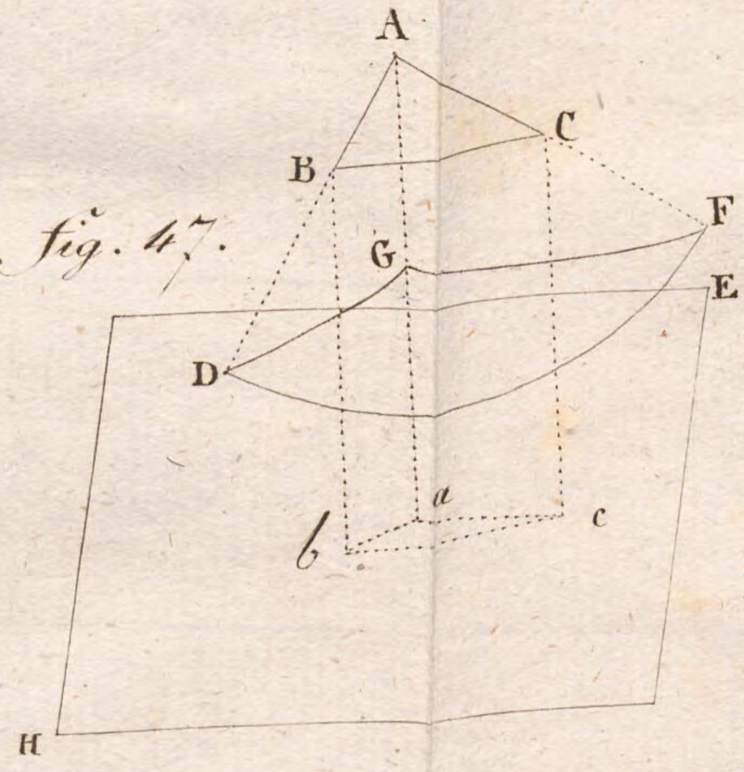


Fig. 48.

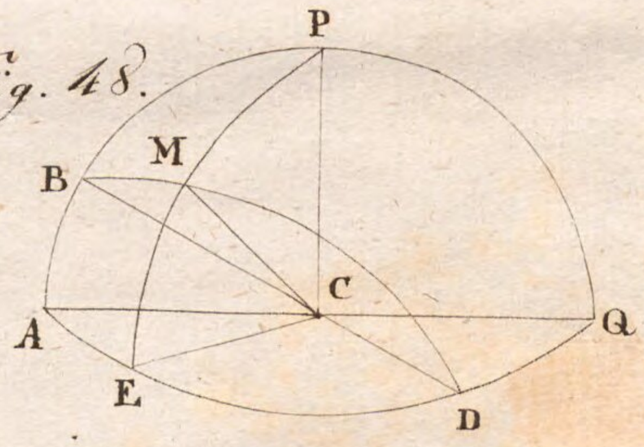


Fig. 49. à. 56.

Fig. 49.

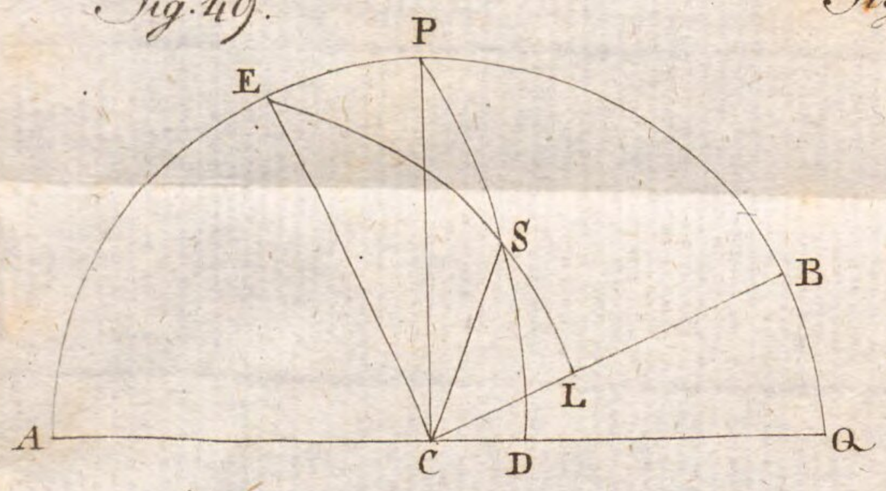


Fig. 50.

Fig. 51.

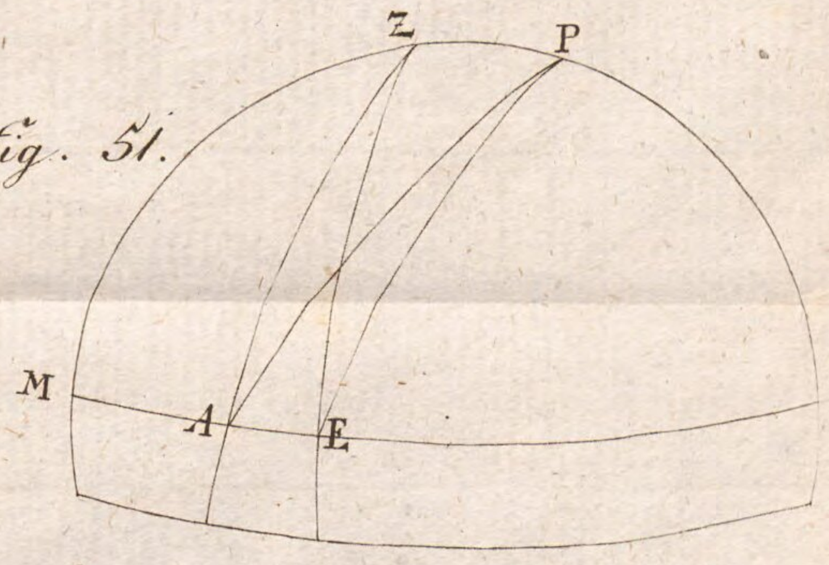
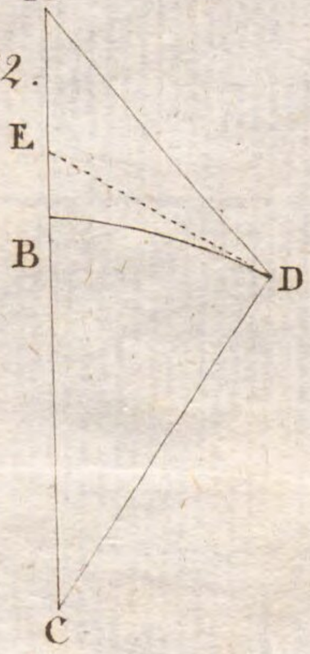


Fig. 52.



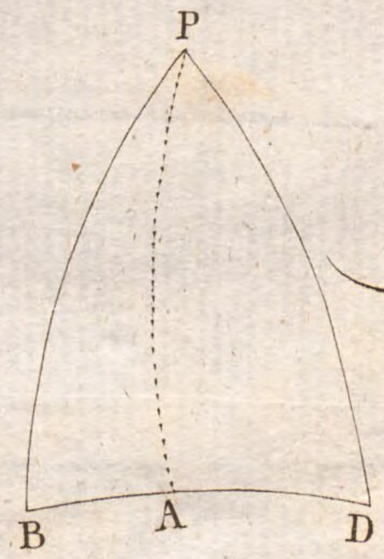


Fig. 53.

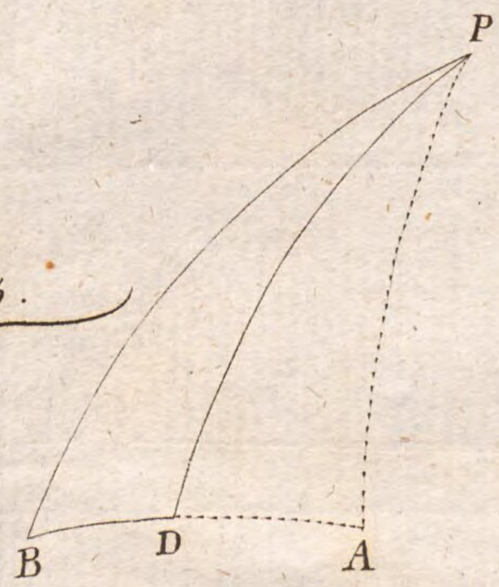


Fig. 54.

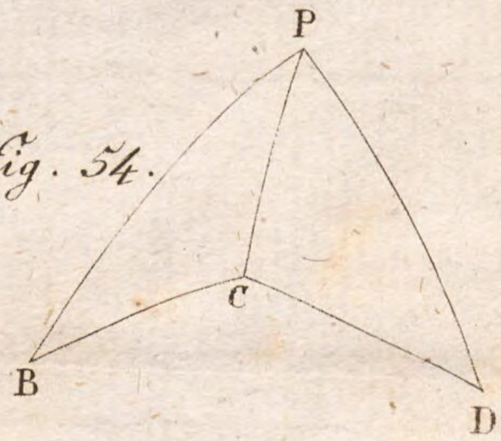


Fig. 55.

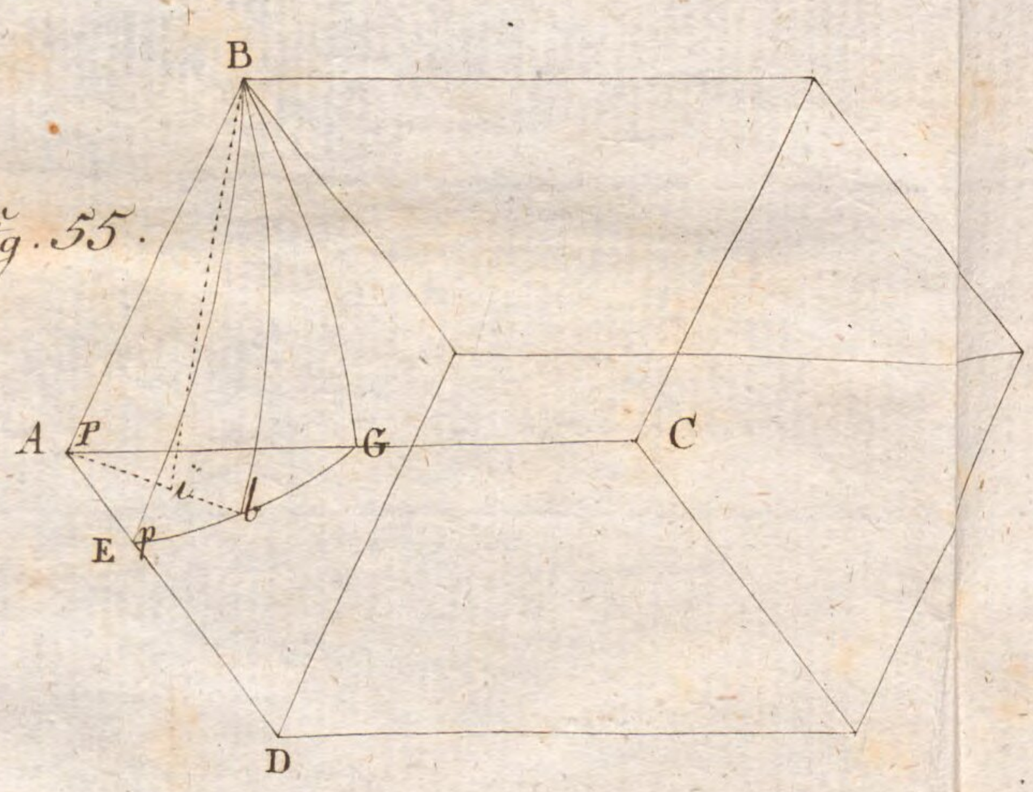
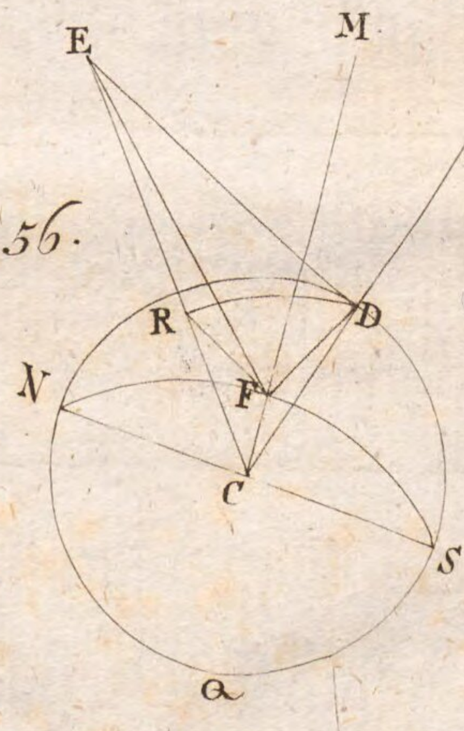


Fig. 56.



BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schön, Johann,

Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie

Bamberg ; Würzburg 1805
Math.p. 505
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082769-8